

Oublier le treillis de Goldbach

Denise Vella-Chemla pilotant chatgpt, juillet 2026

1. Le treillis de Goldbach

1.1. Origine de la construction

Le point de départ de ce travail est une représentation combinatoire de la conjecture de Goldbach. Pour tout entier pair $n \geq 6$, on considère les décompositions

$$n = p + q,$$

où p et q sont impairs et

$$3 \leq p \leq \frac{n}{2}, \quad q = n - p.$$

À chacune de ces décompositions est associé un symbole appartenant à un alphabet de quatre lettres selon la primalité de p et de q .

Cette représentation sera appelée le *treillis de Goldbach*. Le présent article ne porte cependant pas sur la conjecture de Goldbach elle-même. Son objet est l'étude d'un opérateur local apparaissant naturellement dans cette représentation. L'étude de la conjecture de Goldbach constitue simplement le contexte historique de la découverte de cet opérateur.

1.2. L'alphabet à quatre états

On considère l'alphabet

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

Chaque lettre code la nature des deux sommants.

lettre	p	q
a	premier	premier
b	composé	premier
c	premier	composé
d	composé	composé

Cette définition ne fait intervenir que deux propriétés booléennes.

Il est donc naturel d'introduire le codage

$$a = (0, 0), \quad b = (1, 0), \quad c = (0, 1), \quad d = (1, 1),$$

où

$$0 = \text{premier}, \quad 1 = \text{composé}.$$

Ainsi,

$$A \simeq \{0, 1\}^2.$$

Cette identification sera utilisée dans tout le texte. Elle montre que les quatre lettres ne constituent pas un alphabet arbitraire, mais le produit cartésien de deux alphabets binaires. Autrement dit, chaque lettre représente l'état de deux variables booléennes indépendantes. Cette observation, élémentaire en apparence, est fondamentale pour la suite. En effet, toutes les propriétés étudiées dans cet ouvrage dérivent de cette structure produit.

1.3. Les colonnes du treillis

Pour un entier pair fixé n , les décompositions précédentes sont rangées suivant les valeurs croissantes de p .

On obtient alors une suite finie de lettres

$$C_n = (x_1, x_2, \dots, x_\ell),$$

appelée *colonne du treillis*.

La longueur de cette colonne vaut

$$\ell(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor.$$

Chaque colonne est donc un mot sur l'alphabet A .

Le treillis est obtenu en disposant côte à côte les colonnes correspondant aux différents entiers pairs.

Les règles reliant deux colonnes consécutives constituent le cœur de la construction.

1.4. Premiers exemples

Pour fixer les notations, considérons les premiers cas.

Pour $n = 10$,

$$10 = 3 + 7, \quad 10 = 5 + 5,$$

d'où

$$C_{10} = \mathbf{aa}.$$

Pour $n = 12$,

$$12 = 3 + 9, \quad 12 = 5 + 7,$$

ce qui donne

$$C_{12} = \mathbf{ca}.$$

Pour $n = 14$,

$$14 = 3 + 11, \quad 14 = 5 + 9, \quad 14 = 7 + 7,$$

on obtient

$$C_{14} = \mathbf{aca}.$$

Ces premiers exemples montrent déjà que les colonnes ne sont pas indépendantes.

Lorsqu'on passe de C_n à C_{n+2} , les lettres évoluent suivant une règle locale qui ne dépend pas de la valeur de n , mais seulement des états voisins.

C'est cette règle locale qui sera étudiée dans les chapitres suivants.

1.5. Pourquoi oublier provisoirement la conjecture de Goldbach ?

La tentation naturelle consiste à considérer le treillis comme une représentation de la conjecture de Goldbach. Le point de vue adopté ici est différent. Nous considérerons le treillis comme le support d'un système local. Autrement dit, l'objet d'étude n'est pas la primalité des sommants, mais la règle qui transforme une configuration locale en une autre.

Cette inversion de perspective est motivée par une observation simple. Les propriétés algébriques de la règle locale ne dépendent pas des nombres premiers. Elles restent vraies pour tout codage utilisant deux variables booléennes.

Le problème arithmétique est donc momentanément suspendu afin d'isoler la structure algébrique sous-jacente. Cette démarche est classique en mathématiques. Lorsqu'un objet apparaît dans un contexte particulier, il est souvent fécond d'étudier d'abord ses propriétés intrinsèques avant de revenir au problème qui a motivé son introduction. La section suivante est consacrée à l'étude de cette règle locale.

2. Les seize règles locales

2.1. Transition entre deux colonnes

Considérons deux colonnes consécutives du treillis, notées C_n et C_{n+2} .

Lorsque l'on augmente la somme cible de 2, chaque décomposition

$$n = p + q$$

engendre une nouvelle décomposition

$$n + 2 = p + (q + 2).$$

Les lettres de la colonne suivante sont donc déterminées localement à partir de lettres adjacentes de la colonne précédente.

Cette transition peut être décrite par une règle binaire

$$R : A \times A \longrightarrow A.$$

L'étude de cette règle constitue l'objet principal de la section présente.

2.2. Table complète des seize cas

En utilisant l'alphabet

$$A = \{a, b, c, d\},$$

la règle R est donnée par la table suivante :

R	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	a	b	a	b
c	c	d	c	d
d	c	d	c	d

Les lignes correspondent au premier argument de R et les colonnes au second.

Par exemple,

$$R(c, b) = d, \quad R(a, c) = a.$$

Cette table contient seize valeurs possibles, d'où l'expression *les seize règles du treillis*.

2.3. Codage booléen

Rappelons le codage introduit au chapitre précédent :

$$a = (0, 0), \quad b = (1, 0), \quad c = (0, 1), \quad d = (1, 1).$$

Le premier bit indique si le petit sommant est composé, le second si le grand sommant est composé.

Ainsi,

$$A \simeq \{0, 1\}^2.$$

Cette identification permet de réécrire la table précédente sous une forme beaucoup plus simple.

2.4. Réduction à une loi unique

Soient

$$x = (u_1, v_1), \quad y = (u_2, v_2)$$

deux éléments de A .

L'examen des seize cas montre que la règle R vérifie toujours

$$R(x, y) = (u_1, v_2).$$

Autrement dit, le résultat conserve :

- la première composante du premier argument ;
- la seconde composante du second argument.

Les deux autres composantes sont ignorées.

Cette observation permet de remplacer les seize règles apparentes par une seule formule.

Théorème 1. *Pour tous*

$$x = (u_1, v_1), \quad y = (u_2, v_2) \in A,$$

on a

$$R(x, y) = (u_1, v_2).$$

Démonstration. La vérification est immédiate sur les quatre possibilités pour u_1 et les quatre possibilités pour v_2 .

Par exemple,

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = R((0, 0), (0, 1)) = (0, 1) = \mathbf{c},$$

et

$$R(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = R((0, 1), (1, 0)) = (0, 0) = \mathbf{a}.$$

Les quatorze autres cas se traitent de la même manière. □

2.5. Interprétation

La formule

$$R((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = (u_1, v_2)$$

montre que l'opérateur agit comme un mécanisme de transmission locale.

Le premier argument transmet sa première composante, tandis que le second transmet sa seconde composante.

Aucune combinaison arithmétique n'est effectuée ; l'opérateur se contente de sélectionner deux informations et de les assembler.

Cette propriété explique la forte régularité observée dans le treillis.

2.6. Vers une structure algébrique

La simplification précédente suggère de considérer l'alphabet A non plus comme un simple ensemble de lettres, mais comme un ensemble muni d'une loi de composition

$$x * y = R(x, y).$$

La section suivante montrera que cette loi possède des propriétés remarquables : elle est associative, idempotente et définit une bande rectangulaire au sens de la théorie des semi-groupes.

3. Interprétation géométrique

3.1. La règle locale

L'opérateur introduit au chapitre précédent possède une définition purement algébrique.

Il reste à comprendre pourquoi cette loi apparaît naturellement dans le treillis de Goldbach.

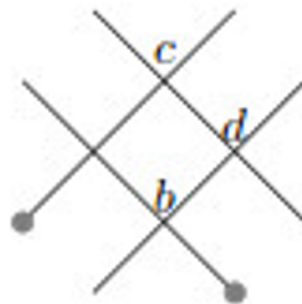
La réponse est essentiellement géométrique.

Chaque lettre ne représente pas un symbole isolé, mais l'état de deux demi-arêtes adjacentes.

La première composante décrit le sommet situé à gauche et au-dessus.

La seconde décrit le sommet situé à droite et au-dessus¹.

règle $cb \rightarrow d$:



Le passage d'une colonne à la suivante consiste alors à trouver les lettres associées aux sommets d'une verticale du treillis en fonction des lettres qui y entrent.

L'information provenant de l'extrémité gauche de l'arête entrante supérieure est conservée. L'information provenant de l'extrémité droite de l'arête entrante inférieure est également conservée. Les deux informations centrales disparaissent.

La règle

$$(u, v)(x, y) = (u, y)$$

n'est donc plus une définition arbitraire. Elle est imposée par la géométrie locale du treillis.

1. Voir l'ensemble des graphiques ici <https://denisevellachemla.eu/perdu2.pdf> (ancienne version du site perdue, version provisoire, à reprendre).

3.2. Le rôle des quatre composantes

Considérons deux lettres successives

$$(u, v) \quad \text{et} \quad (x, y).$$

Les quatre bits

$$u, v, x, y$$

sont présents avant l'application de la règle locale.

Après application, seuls subsistent u et y ; les composantes v et x ne jouent plus aucun rôle. L'opérateur agit donc comme une sélection des deux informations extérieures. Il ne modifie aucune valeur. Il ne crée aucune information nouvelle. Il ne réalise aucune combinaison logique. Il se contente de transmettre deux composantes particulières. Cette observation explique la simplicité remarquable de la loi obtenue.

3.3. Une lecture sur le treillis

Dans le treillis, deux colonnes consécutives possèdent une zone de recouvrement. Les seize règles obtenues expérimentalement proviennent uniquement de cette interaction locale. Aucune information concernant le reste du treillis n'intervient. Autrement dit, la transition entre deux colonnes est entièrement déterminée par une configuration élémentaire. Cette propriété justifie l'emploi du terme *opérateur local*. La valeur produite dépend exclusivement des deux états immédiatement présents. Aucun voisin plus éloigné n'est sollicité.

3.4. Localité

La notion de localité est essentielle. Elle signifie que toute propriété globale du treillis résulte de l'itération d'une même règle élémentaire.

Une telle situation est fréquente en mathématiques : des structures très complexes peuvent résulter de la répétition d'une règle extrêmement simple.

Dans le cas présent, la totalité des seize transitions est contenue dans une unique application

$$R : A \times A \longrightarrow A.$$

Ainsi, la complexité apparente du treillis provient davantage de la répétition de la règle que de la règle elle-même.

3.5. Le statut du treillis

Le point de vue adopté dans ce texte conduit à distinguer soigneusement deux objets.

Le premier est le treillis lui-même. Le *treillis Goldbach* dépend de la suite des nombres premiers.

Le second est l'opérateur local. La définition de l'opérateur local ne fait intervenir aucune propriété arithmétique.

Le treillis constitue donc une réalisation particulière de cet opérateur local. Inversement, l'opérateur peut être étudié indépendamment de son contexte d'apparition.

Cette distinction, qui importera dans toute la suite, permet de séparer les propriétés purement algébriques des phénomènes propres à la conjecture de Goldbach.

Résumé

Le présent chapitre montre que les seize règles du treillis ne sont pas des relations indépendantes. Elles résultent toutes d'un même mécanisme géométrique local.

L'opérateur introduit dans la précédente section apparaît ainsi comme la traduction algébrique d'une règle de raccordement entre deux configurations voisines.

Dans la section suivante, nous reviendrons sur les conséquences de cette interprétation pour la structure du treillis lui-même.

4. Structure algébrique de l'opérateur

4.1. La loi de composition

Les chapitres précédents ont montré que les seize transitions observées dans le treillis se réduisent à une unique application

$$R : A \times A \longrightarrow A,$$

définie par

$$R((u, v), (x, y)) = (u, y).$$

Dans toute la suite, cette application sera notée sous la forme d'une loi interne

$$x * y = R(x, y).$$

L'ensemble A est ainsi muni d'une structure algébrique dont les propriétés peuvent être étudiées indépendamment du treillis ayant conduit à sa découverte.

4.2. Associativité

Théorème 2. *La loi $*$ est associative.*

Démonstration. Soient

$$x = (u, v), \quad y = (r, s), \quad z = (m, n).$$

On calcule

$$x * y = (u, s),$$

puis

$$(x * y) * z = (u, n).$$

D'autre part,

$$y * z = (r, n),$$

d'où

$$x * (y * z) = (u, n).$$

Les deux membres coïncident. □

L'associativité permet de supprimer toute parenthésation dans un produit fini.

4.3. Idempotence

Proposition 3. *Tout élément est idempotent.*

Démonstration. Soit $x = (u, v)$. Alors

$$x^2 = (u, v) * (u, v) = (u, v) = x.$$

□

Il en résulte que

$$x^n = x, \quad n \geq 1.$$

4.4. Produits de longueur quelconque

Proposition 4. *Soient*

$$x_i = (u_i, v_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Alors

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (u_1, v_n).$$

Démonstration. Par récurrence sur n . Le cas $n = 2$ est la définition. Supposons le résultat vrai au rang n . Alors

$$x_1 \cdots x_n = (u_1, v_n),$$

et

$$(x_1 \cdots x_n) x_{n+1} = (u_1, v_{n+1}),$$

ce qui conclut. □

4.5. Conséquences immédiates

Pour tous $x, y, z \in A$,

$$xyz = xz.$$

Plus généralement,

$$xy_1y_2 \cdots y_kz = xz.$$

Ainsi, dans tout produit fini, seules subsistent la première composante du premier facteur et la seconde composante du dernier facteur.

5. L'opérateur comme bande rectangulaire

5.1. Relations d'absorption

La formule

$$(xy)z = xz$$

établie au chapitre précédent entraîne immédiatement plusieurs identités caractéristiques.

Proposition 5. *Pour tous $x, y \in A$,*

$$xyx = x, \quad yxy = y.$$

Démonstration. En appliquant l'identité $(xy)z = xz$ avec $z = x$, on obtient

$$xyx = xx = x,$$

l'idempotence donnant $xx = x$. La seconde identité est analogue. $\square$

5.2. Caractérisation

Théorème 6. *Le semi-groupe $(A, *)$ est une bande rectangulaire.*

Démonstration. Le chapitre précédent a établi l'associativité et l'idempotence. Il reste à vérifier

$$xyx = x.$$

Cette relation vient d'être démontrée. Il s'agit précisément d'une identité caractéristique des bandes rectangulaires. $\square$

5.3. Description explicite

Chaque élément de A s'écrit (u, v) avec $u, v \in \{0, 1\}$.

Les classes à première composante fixée sont les idéaux à gauche élémentaires, tandis que les classes à seconde composante fixée correspondent aux idéaux à droite. Le produit

$$(u, v)(x, y) = (u, y)$$

conserve exactement ces deux projections.

5.4. Produit direct

L'ensemble A s'identifie à

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\}.$$

La multiplication consiste à projeter sur la première coordonnée du facteur de gauche et sur la seconde coordonnée du facteur de droite. Cette description montre que toute l'information algébrique est contenue dans la structure produit.

5.5. Conséquences

Aucune opération logique n'est effectuée par $*$. La loi ne crée ni ne détruit de valeur booléenne ; elle sélectionne deux composantes parmi quatre. Cette propriété explique la stabilité de l'opérateur lorsqu'il est itéré le long du treillis.

5.6. Résumé

L'opérateur local découvert dans le treillis de Goldbach définit une bande rectangulaire finie à quatre éléments. Cette caractérisation est indépendante de l'origine arithmétique de l'opérateur et permet désormais de l'étudier dans le cadre général de la théorie des semi-groupes.

6. Retour au treillis : algèbre et arithmétique

Les chapitres précédents ont permis d'isoler complètement l'opérateur local mis en évidence dans le treillis de Goldbach. Son étude ne dépend plus du contexte arithmétique qui l'a fait apparaître.

Les seize transitions observées entre deux colonnes successives se réduisent à une unique loi de composition

$$(u, v)(x, y) = (u, y),$$

qui définit une bande rectangulaire finie.

Toutes les propriétés démontrées jusqu'ici — associativité, idempotence, identité $xyx = x$, simplification $xyz = xz$ — résultent exclusivement de cette définition.

Aucune d'entre elles ne fait intervenir les nombres premiers.

Cette première étape est désormais achevée. Elle permet de distinguer clairement deux niveaux d'analyse.

6.1. Le niveau algébrique

L'opérateur local peut être étudié indépendamment du treillis qui l'a fait apparaître. Son comportement est entièrement déterminé par la loi

$$(u, v)(x, y) = (u, y),$$

qui consiste simplement à conserver la première composante du facteur de gauche et la seconde composante du facteur de droite.

Cette règle ne crée aucune information nouvelle. Elle ne réalise aucune combinaison logique. Elle ne fait que sélectionner deux composantes parmi quatre.

Les propriétés démontrées précédemment sont donc universelles. Elles restent vraies pour toute suite de couples de bits, quelles que soient leur origine ou leur signification.

Autrement dit, elles relèvent exclusivement de l'algèbre.

6.2. Le niveau arithmétique

Le treillis de Goldbach ne fournit cependant pas des données arbitraires.

Les couples auxquels est appliquée la loi précédente proviennent uniquement des décompositions

$$n = p + q,$$

où p et q sont deux nombres premiers.

L'ensemble des mots effectivement rencontrés dans le treillis est donc soumis à des contraintes qui ne proviennent plus de la loi de composition elle-même, mais de la distribution des nombres premiers.

Les régularités observées dans le treillis peuvent ainsi avoir deux origines très différentes.

Certaines résultent nécessairement de la structure algébrique de l'opérateur.

D'autres sont imposées par les propriétés arithmétiques des partitions de Goldbach.

Toute la difficulté consiste précisément à distinguer ces deux niveaux.

6.3. Une méthode d'analyse

L'identification de l'opérateur comme bande rectangulaire fournit désormais un cadre de travail.

La première étape consiste à déterminer les propriétés qui découlent nécessairement de la loi de composition.

Ces propriétés constituent des invariants universels : elles apparaissent pour toute suite d'états, indépendamment de leur origine.

Les phénomènes qui subsistent après élimination de ces invariants ne peuvent plus être expliqués par la seule algèbre.

Ils doivent provenir des contraintes imposées par les partitions en nombres premiers.

Cette séparation fournit une méthode d'analyse.

Elle évite d'attribuer à la conjecture de Goldbach des phénomènes qui résultent simplement de la structure de l'opérateur.

Inversement, elle permet d'isoler les propriétés qui sont véritablement arithmétiques.

6.4. Portée des résultats

L'identification de la bande rectangulaire ne constitue ni une preuve ni une réfutation de la conjecture de Goldbach.

Elle ne répond pas directement à la question de l'existence des partitions en deux nombres premiers.

Son intérêt est d'une autre nature.

Elle montre qu'une représentation issue d'un problème arithmétique conduit naturellement à une structure algébrique classique, dont les propriétés décrivent entièrement la dynamique locale du treillis.

Cette description sépare désormais ce qui relève du mécanisme de propagation de l'information de ce qui dépend effectivement de la répartition des nombres premiers. L'opérateur devient ainsi un langage dans lequel les propriétés du treillis peuvent être formulées et étudiées, tandis que le problème arithmétique demeure l'objet principal de la suite de cette étude.

7. En forme de conclusion

En 2014, je pensais que le treillis m'avait permis de mettre au point une démonstration de la conjecture de Goldbach. En 2017, Alain Connes, que je sollicitais, a mis à bas mon approche par ce mail : comme je fonctionne à l'affectif, la réponse d'Alain en 2017 a signé pour moi le coup d'arrêt brutal de mon étude du treillis. Il a fallu que j'aie épuisé toutes mes autres cartouches pour revenir à cette approche en espérant que les ia pourraient m'aider en tirer quelque chose. Je me suis acharnée à interroger les 5 ia que sont chatgpt (qui a écrit le présent livre), mistral, gemini, claude et deepseek, à ce sujet et on pourra trouver toutes leurs réponses aux adresses fournies en annexe. Ce qui compte pour finir, c'est que j'ai replacé de l'espoir dans une approche que j'avais abandonnée et cela seul compte.

7.1. Annexes : adresses (url) de notes

- [1] <https://denisevellachemla.eu/merveilleuxmaillage.pdf>
- [2] <https://denisevellachemla.eu/transposition.pdf>
- [3] <https://denisevellachemla.eu/cgtempo.pdf>
- [4] <https://denisevellachemla.eu/cg-info.pdf>
- [5] <https://denisevellachemla.eu/annexes.pdf>
- [6] <https://denisevellachemla.eu/cg-mots-autom.pdf>
- [7] <https://denisevellachemla.eu/resume.pdf>
- [8] <https://denisevellachemla.eu/nombres-et-lettres.pdf>
- [9] <https://denisevellachemla.eu/champ-de-lettres.pdf>
- [10] <https://denisevellachemla.eu/projections.pdf>
- [11] <https://denisevellachemla.eu/nabcd.pdf>
- [12] <https://denisevellachemla.eu/pavages.pdf>
- [13] <https://denisevellachemla.eu/pavages2.pdf>
- [14] <https://denisevellachemla.eu/pavages3.pdf>
- [15] <https://denisevellachemla.eu/tauto.pdf>
- [16] <https://denisevellachemla.eu/points-noncommut.pdf>
- [17] <https://denisevellachemla.eu/boolseqRP.pdf>
- [18] <https://denisevellachemla.eu/acdn.pdf>
- [19] <https://denisevellachemla.eu/las.pdf>
- [20] <https://denisevellachemla.eu/doc-p10-gemini-dvc-20260708.pdf>

- [21] <https://denisevellachemla.eu/p10-triminos-gemini-dvc-20260709.pdf>
- [22] <https://denisevellachemla.eu/synthese-dialectique-goldbach-gemini-dvc-20260709.pdf>
- [23] <https://denisevellachemla.eu/p10-treillis-lattice-claude-dvc-20260708.pdf>
- [24] <https://denisevellachemla.eu/s2-preuve-mistral-16-regles-refutation-claude-dvc-20260711.pdf>
- [25] <https://denisevellachemla.eu/v0-demonstration-mistral-dvc-20260710.pdf>
- [26] <https://denisevellachemla.eu/v8-gemini-analyse-cogitations-goldbach-dvc.pdf>
- [27] <https://denisevellachemla.eu/conseil-poursuite-gemini-ma-piste-preferee-4-lettres-dvc-20260711.pdf>
- [28] <https://denisevellachemla.eu/gemini-poursuit-coute-que-coute-dvc-20260712.pdf>
- [29] <https://denisevellachemla.eu/avant-dernier-fichier-4-lettres-16-regles-deepseek-dvc-20260715.pdf>
- [30] <https://denisevellachemla.eu/CG-4-lettres-deepseek-dvc-20260712.pdf>
- [31] <https://denisevellachemla.eu/gemini-poursuit-coute-que-coute-dvc-20260712.pdf>
- [32] <https://denisevellachemla.eu/retour-claude-langage-4-lettres-entropie-Connes-dvc-20260712.pdf>