

1. Résumé

Les bandes rectangulaires constituent une classe classique de semi-groupes. Elles sont généralement introduites de manière axiomatique ou comme produits d'une bande gauche et d'une bande droite. Le présent article adopte le point de vue inverse.

Nous montrons comment la loi canonique

$$(u, v)(x, y) = (u, y)$$

émerge naturellement comme conséquence d'une règle de raccordement locale apparaissant dans une représentation combinatoire de la conjecture de Goldbach.

L'intérêt de cette étude n'est donc pas la théorie des bandes rectangulaires elle-même, mais la manière dont une structure algébrique connue peut être imposée par une géométrie locale.

2. Introduction

Les structures algébriques apparaissent souvent de deux façons. La première consiste à partir d'une loi de composition abstraite, puis à en étudier les propriétés. La seconde consiste à rencontrer une règle locale au cours de l'étude d'un problème concret, avant de reconnaître que cette règle est un objet algébrique déjà connu.

Le travail présenté ici relève de cette seconde démarche. Le point de départ n'est pas un semi-groupe mais une représentation combinatoire construite à partir des partitions de Goldbach. Cette représentation fait apparaître seize transitions locales entre deux colonnes successives. À première vue, ces seize transitions semblent indépendantes. L'observation essentielle est qu'elles sont toutes décrites par une même opération

$$(u, v)(x, y) = (u, y).$$

Autrement dit, les seize règles observées ne sont que les seize évaluations d'une unique loi de composition. Cette loi est bien connue en théorie des semi-groupes : elle définit le modèle canonique d'une bande rectangulaire.

Le résultat principal du présent article n'est donc pas l'identification de cette structure. Il consiste à expliquer pourquoi cette loi apparaît nécessairement.

3. Le point de départ

Le treillis étudié provient d'une représentation des partitions de Goldbach.

Chaque décomposition

$$n = p + q$$

est codée suivant la primalité de ses deux sommants. Chaque lettre possède donc deux composantes booléennes. On peut écrire

$$a = (0, 0), \quad b = (1, 0), \quad c = (0, 1), \quad d = (1, 1).$$

Les quatre lettres ne constituent donc pas un alphabet arbitraire. Elles représentent les quatre éléments du produit

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\}.$$

Lorsque l'on passe d'une colonne du treillis à la suivante, les lettres évoluent selon une règle purement locale. L'étude expérimentale montre qu'il existe exactement seize cas possibles. La première surprise est que ces seize cas possèdent une régularité parfaite.

4. La disparition des seize règles

L'examen des seize transitions conduit à une observation extrêmement simple.

Si l'on note

$$x = (u, v), \quad y = (x, y),$$

alors le résultat est toujours

$$(u, y).$$

Deux composantes disparaissent. Deux seulement sont conservées. Plus précisément,

- la première composante du premier argument ;
- la seconde composante du second argument.

Les deux composantes internes ne jouent absolument aucun rôle. Ainsi, les seize règles observées expérimentalement ne sont pas seize lois distinctes. Elles sont les seize valeurs d'une même application.

Le problème devient alors le suivant. Pourquoi une règle aussi particulière apparaît-elle ici ?

5. Une nécessité géométrique

La réponse n'est pas algébrique. Elle est géométrique. Deux lettres successives du treillis correspondent à deux arêtes adjacentes. Ces deux arêtes possèdent deux sommets extérieurs et deux sommets intérieurs. Lors du passage à la colonne suivante, les deux sommets centraux cessent d'appartenir au bord du nouveau domaine. Ils disparaissent naturellement. Les deux sommets extrêmes, au contraire, restent visibles. Ils sont donc transmis. Autrement dit, la règle

$$(u, v)(x, y) = (u, y)$$

n'est pas un choix. Elle est imposée par la géométrie locale du raccordement. L'algèbre ne fait ensuite que traduire cette observation.

6. L'apparition d'une bande rectangulaire

Une fois la loi identifiée, sa nature devient immédiate. Elle est associative. Elle est idempotente. Elle vérifie

$$xyx = x.$$

Elle constitue donc une bande rectangulaire. Cette conclusion appartient à la théorie classique des semi-groupes. Elle ne dépend plus du treillis lui-même. Le rôle du treillis n'est donc pas de produire une nouvelle classe de semi-groupes. Son rôle est d'avoir conduit naturellement à l'un des modèles fondamentaux de cette théorie.

7. Une inversion de point de vue

Dans la littérature, les bandes rectangulaires sont introduites comme des objets algébriques abstraits. Le point de vue adopté ici est inverse. Nous partons d'un problème arithmétique. Nous observons une règle locale. Nous montrons que cette règle possède une interprétation géométrique. Ce n'est qu'ensuite que nous reconnaissons la structure algébrique qu'elle définit. L'intérêt principal n'est donc pas la bande rectangulaire en elle-même. Il réside dans le fait qu'une géométrie discrète impose naturellement une loi de composition connue.

8. Conclusion

La structure étudiée dans cet article n'est pas nouvelle. La théorie des bandes rectangulaires est bien établie. En revanche, le chemin qui conduit à cette structure est, à notre connaissance, inhabituel. Une représentation issue de la conjecture de Goldbach fait apparaître, sans hypothèse algébrique préalable, une règle locale dont la traduction formelle est exactement le produit canonique d'une bande gauche et d'une bande droite. Cette observation illustre un phénomène fréquent en mathématiques. Une construction élaborée pour répondre à une question particulière peut conduire naturellement vers une structure abstraite déjà connue. L'intérêt réside alors moins dans la structure elle-même que dans les raisons profondes de son apparition.