

1. Résumé

Ce document apporte des précisions et des compléments aux travaux antérieurs sur le treillis de Goldbach. Nous rappelons la structure de bande rectangulaire et montrons qu'elle est entièrement indépendante des propriétés arithmétiques des nombres premiers. Nous formalisons la reformulation de la conjecture de Goldbach en termes d'autocorrélation de la suite des primalités des impairs, et nous discutons les limites des tentatives de preuve fondées sur la seule structure algébrique ou sur des modèles probabilistes naïfs. Enfin, nous proposons une perspective qui met l'accent sur la nature fractale de la suite des nombres premiers et sur les corrélations à longue portée.

2. Introduction

Les documents précédents ont mis en évidence une structure algébrique remarquable dans le treillis de Goldbach : la règle locale de transition entre deux colonnes successives définit une *bande rectangulaire* sur l'alphabet à quatre lettres $A = \{0, 1\}^2$. Cette observation est élégante et elle a permis de réduire les seize règles apparentes à une unique loi de composition :

$$(u_1, v_1) * (u_2, v_2) = (u_1, v_2).$$

Toutefois, il est essentiel de ne pas confondre cette structure algébrique avec les contraintes arithmétiques imposées par la suite des nombres premiers. Le but de ce complément est de clarifier cette distinction, de formaliser précisément le lien entre le treillis et la conjecture de Goldbach, et d'expliquer pourquoi une démonstration de la conjecture ne peut pas se contenter d'invoquer la seule rigidité de l'opérateur local.

3. Rappels et formalisation

3.1. Le treillis et son alphabet

Pour chaque entier pair $n \geq 6$, on considère les décompositions $n = p + q$ avec p impair, $3 \leq p \leq n/2$. On code la primalité de p et de q par deux bits : 0 pour premier, 1 pour composé. On obtient ainsi une colonne C_n de longueur $\ell(n) = \lfloor n/4 \rfloor$, dont les éléments sont des couples $(u, v) \in \{0, 1\}^2$. La suite des impairs est notée $S = (s_i)_{i \geq 0}$, où $s_i = 0$ si $3 + 2i$ est premier, 1 sinon. Alors la colonne C_n s'écrit :

$$C_n = \left((s_i, s_{d(n)-i}) \right)_{0 \leq i \leq \lfloor n/4 \rfloor - 1}, \quad d(n) = \frac{n-6}{2}.$$

3.2. L'opérateur local

Le passage de C_n à C_{n+2} est régi par la règle :

$$R((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = (u_1, v_2).$$

Cette règle est locale : elle ne dépend que de deux lettres consécutives de la colonne précédente. Elle est associative, idempotente et satisfait $xyx = x$, ce qui en fait une bande rectangulaire.

3.3. Reformulation de la conjecture

La conjecture de Goldbach équivaut à :

$$\forall n \geq 6 \text{ pair}, \quad \exists i \in [0, \lfloor n/4 \rfloor - 1] \text{ tel que } s_i = s_{d(n)-i} = 0.$$

En d'autres termes, la colonne C_n doit contenir au moins une lettre $\mathbf{a} = (0, 0)$.

4. Que peut apporter l'algèbre ?

L'algèbre de la bande rectangulaire nous donne des informations sur la propagation des bits lorsque l'on itère l'opérateur. Par exemple, si l'on part d'une colonne initiale et que l'on applique successivement la règle, on obtient des colonnes dont les lettres sont des combinaisons de bits provenant des bords. En effet, un calcul direct montre que :

$$R(R(x_1, x_2), R(x_3, x_4)) = (u_1, v_4),$$

et plus généralement, toute itération ne fait que sélectionner des composantes extrêmes. Cette propriété est purement algébrique et ne dépend pas des valeurs des bits. Elle peut être résumée par le lemme suivant.

Lemme 1. *Soit une séquence de lettres $x_1, \dots, x_m$ avec $x_i = (u_i, v_i)$. Alors toute application répétée de la règle R sur des paires adjacentes de cette séquence produit une lettre de la forme (u_i, v_j) pour certains indices i et j . En particulier, les composantes internes disparaissent.*

Cela signifie que, quelles que soient les valeurs de la suite S , les opérations locales ne peuvent jamais faire apparaître un 0 qui ne proviendrait pas déjà des bords du domaine considéré. Autrement dit, l'algèbre impose que les 0 (les primalités) se propagent le long de certains chemins.

5. Limites de l'approche algébrique

5.1. La "rigidité" n'est pas suffisante

Dans certains documents (notamment `etat-courant-mistral-dvc-20260718.pdf`), il est suggéré que la structure de bande rectangulaire, couplée à des conditions aux limites (les bords du treillis contiennent des 0), suffirait à garantir l'existence d'un a dans chaque colonne. Cette affirmation est incorrecte. L'algèbre seule ne peut pas garantir que deux flux de 0 (un horizontal, un diagonal) se croisent en un point donné. Elle ne fait que décrire comment les bits sont copiés. Pour que la colonne C_n contienne un a , il faut qu'il existe un indice i tel que $s_i = s_{d(n)-i} = 0$. C'est une condition portant sur la suite S , et aucune propriété algébrique de l'opérateur ne peut l'imposer.

Pour illustrer ce point, considérons une suite S arbitraire (pas nécessairement la suite des primalités) qui ne contiendrait aucun 0 à certaines positions symétriques. Alors les colonnes correspondantes n'auraient pas de a , bien que l'opérateur R soit le même. L'algèbre est donc muette sur l'existence de ces symétries.

5.2. Le modèle probabiliste et ses limites

Le modèle de Cramér, qui suppose que chaque impair est premier avec probabilité $1/\ln k$, donne une probabilité très faible qu'une colonne soit sans a (environ $\exp(-n/(4(\ln n)^2)))$, et le théorème de Borel-Cantelli suggère qu'il n'y aurait qu'un nombre fini d'exceptions. Cependant, les nombres premiers ne sont pas aléatoires : ils possèdent des corrélations arithmétiques fortes, liées aux valuations p -adiques. La suite S est une suite fractale au sens de Kimberling, et sa structure est beaucoup plus rigide que celle d'une suite aléatoire. C'est cette rigidité arithmétique qui rend la conjecture difficile, et non l'absence de structure algébrique.

6. Une perspective : exploiter la structure fractale

La suite S est définie par

$$s_i = 0 \iff \Omega(3 + 2i) = 1,$$

où $\Omega(m)$ est le nombre total de facteurs premiers de m comptés avec multiplicité. Les ensembles $\{i : \Omega(3 + 2i) = k\}$ sont des ensembles fractals (suites de Kimberling). La conjecture de Goldbach demande que pour toute translation $d(n)$, il existe une symétrie centrale dans l'ensemble des indices où $\Omega = 1$. Cela revient à étudier l'intersection de l'ensemble des premiers avec son translaté. Une approche prometteuse consisterait à utiliser des outils de théorie analytique des nombres (méthodes du cercle, crible) ou des méthodes de géométrie arithmétique pour contrôler ces corrélations.

L'algèbre du treillis, quant à elle, fournit un langage commode pour reformuler le problème, mais elle ne le résout pas. Elle permet de visualiser comment les bits de primalité se propagent, et elle peut être utile pour concevoir des algorithmes de vérification rapide, mais elle ne dispense pas d'une analyse arithmétique fine.

7. Conclusion

Ce complément a souligné la distinction essentielle entre le niveau algébrique (la bande rectangulaire) et le niveau arithmétique (la suite S). L'opérateur local est un outil de sélection d'informations, mais il ne crée pas de corrélations nouvelles. La conjecture de Goldbach est une propriété de corrélation symétrique de la suite des nombres premiers, et sa démonstration nécessite de comprendre la structure fine de cette suite. Les travaux futurs pourraient s'orienter vers l'étude des fonctions de corrélation de S à l'aide de méthodes de crible ou de la théorie des nombres premiers en progression arithmétique. En attendant, le treillis reste un cadre pédagogique et heuristique précieux.

Références

- [1] D. Vella-Chemla, *Le treillis de Goldbach*, 2026.
- [2] D. Vella-Chemla, *Le pont entre géométrie et algèbre*, 2026.
- [3] J. M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford University Press, 1995.
- [4] C. Kimberling, *Fractal Sequences and p -adic Valuations*, Journal of Integer Sequences, 1998.