Ennuyée (Denise Vella-Chemla, 4.10.2018)

On voudrait expliquer ce qui nous bloque là.
Idéalement, pour compter aisément les nombres premiers, on aurait besoin, selon le diviseur 2, d'avoir une fonction qui associe comme images aux entiers successifs la suite :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4	...

A la place de cette fonction, on dispose du *log* en base 2, bien régulier, et qui fournit ces valeurs :

1 0	2 1	3 $1,\ldots$	4 2	5 $2,\ldots$	6 $2,\ldots$	7 $2,\ldots$	8 3	9 $3,\ldots$	10 $3,\ldots$	11 $3,\ldots$	12 $3,\ldots$	13 $3,\ldots$	14 $3,\ldots$	15 $3,\ldots$	16 4
17 $4,\ldots$	... ...														

Les deux fonctions coïncident sur les puissances de 2. Entre deux puissances de 2, il y a $2^{k+1} - 2^k - 1$ nombres non entiers de parties entières égales.
Selon le diviseur 3, on voudrait :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	...

alors qu'on a :

1 0	2 $0,\ldots$ (*au nombre de* 5)	3 1	... $1,\ldots$ (*au nombre de* 17)	9 2	... $2,\ldots$ (*au nombre de* 53)	27 3	... $3,\ldots$	81 4	... ...

Les fonctions qui nous intéresseraient associent presque tout le temps aux nombres l'image 0 ; de temps en temps, elles associent aux nombres l'image 1, moins souvent, elles leur associent l'image 2, encore moins souvent, l'image 3, etc.

Par moins souvent, il faut comprendre logarithmiquement en base x moins souvent.

Le nombre de nombres à virgules de même partie entière qui se succèdent (ce qu'on a noté entre parenthèses par des *"au nombre de"*) est toujours égal à $x^{k+1} - x^k - 1$.

Et ce qui reste extraordinaire, c'est le fait de réussir à approximer $\pi(x)$ par $Li(x) = li(x) - li(2)$.

$li(x)$ prend les valeurs suivantes :

li(1)=-inf	li(21)=10.2363	li(41)=16.1097	li(61)=21.2091	li(81)=25.9064
li(2)=1.0451	li(22)=10.5623	li(42)=16.3781	li(62)=21.4519	li(82)=26.1336
li(3)=2.1635	li(23)=10.8835	li(43)=16.6448	li(63)=21.6937	li(83)=26.3602
li(4)=2.9675	li(24)=11.2003	li(44)=16.9098	li(64)=21.9346	li(84)=26.5862
li(5)=3.6345	li(25)=11.5129	li(45)=17.1733	li(65)=22.1746	li(85)=26.8116
li(6)=4.2222	li(26)=11.8217	li(46)=17.4353	li(66)=22.4137	li(86)=27.0364
li(7)=4.7570	li(27)=12.1268	li(47)=17.6957	li(67)=22.6520	li(87)=27.2606
li(8)=5.2537	li(28)=12.4286	li(48)=17.9547	li(68)=22.8894	li(88)=27.4843
li(9)=5.7212	li(29)=12.7271	li(49)=18.2124	li(69)=23.1260	li(89)=27.7073
li(10)=6.1655	li(30)=13.0226	li(50)=18.4686	li(70)=23.3618	li(90)=27.9298
li(11)=6.5910	li(31)=13.3152	li(51)=18.7236	li(71)=23.5967	li(91)=28.1518
li(12)=7.00054	li(32)=13.6050	li(52)=18.9773	li(72)=23.8310	li(92)=28.3732
li(13)=7.3965	li(33)=13.8923	li(53)=19.2298	li(73)=24.0644	li(93)=28.5941
li(14)=7.7808	li(34)=14.1771	li(54)=19.4811	li(74)=24.2971	li(94)=28.8145
li(15)=8.1548	li(35)=14.4595	li(55)=19.7312	li(75)=24.5291	li(95)=29.0343
li(16)=8.5197	li(36)=14.7396	li(56)=19.9802	li(76)=24.7603	li(96)=29.2537
li(17)=8.8764	li(37)=15.0176	li(57)=20.2281	li(77)=24.9909	li(97)=29.4725
li(18)=9.2258	li(38)=15.2936	li(58)=20.4749	li(78)=25.2208	li(98)=29.6908
li(19)=9.5686	li(39)=15.5675	li(59)=20.7206	li(79)=25.4500	li(99)=29.9087
li(20)=9.9052	li(40)=15.8395	li(60)=20.9654	li(80)=25.6785	li(100)=30.1261

On réalise par programme que si l'on remplace le signe de l'intégrale définissant $li(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{ln\ t}$ par un signe somme et qu'on somme à partir de 2, la somme obtenue semble approximer le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x de la même façon que le fait le logarithme intégral.

Il faudrait du coup réussir à comprendre pourquoi $g(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{x} \frac{1}{ln\ k}$ permet de compter $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

La somme des inverses des logarithmes népériens vaut par exemple 78627 pour 10^6 quand $\pi(x)$ vaut 78498.

Elle vaut 664918 pour 10^7 quand $\pi(x)$ vaut 664579.

Réfléchissons aux fonctions $f_y(x) = \dfrac{1}{log_y(x)}$, par exemple aux fonctions $f_2(x) = \dfrac{1}{log_2(x)}$ ou $f_3(x) = \dfrac{1}{log_3(x)}$.

On a $f_2(4) = \dfrac{1}{2}$ ou $f_2(8) = \dfrac{1}{3}$ car $4^{\frac{1}{2}} = 2$ ou $8^{\frac{1}{3}} = 2$.

On a de même $f_3(9) = \dfrac{1}{2}$ ou $f_3(27) = \dfrac{1}{3}$ car $9^{\frac{1}{2}} = 3$ ou $27^{\frac{1}{3}} = 3$.

La fonction plus générale (en base e) $f(x) = \dfrac{1}{ln\ x}$ associe à x la puissance à laquelle il faut élever x pour trouver e.

La fonction qu'on a proposée $g(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{x} \frac{1}{ln\ k}$ calcule quant à elle pour un nombre donné x la somme pour les nombres entiers successifs jusqu'à x des puissances auxquelles il faut élever ces nombres pour trouver e.

Comment faire intervenir la factorielle dans tout ça ? On sait qu'un nombre premier est à puissance 1 dans sa propre factorielle tandis qu'un nombre composé est à puissance au moins 2 dans sa propre factorielle.

$$\begin{array}{cccccc} g(x) & = \dfrac{1}{ln\ 2} & + \dfrac{1}{ln\ 3} & + \dfrac{1}{ln\ 4} & + \ldots & + \dfrac{1}{ln\ x} \\ & f(2) & f(3) & f(4) & \ldots & f(x) \end{array}$$

On rappelle que :

$$\begin{array}{l} e^{f(2)} = 2 \\ e^{f(3)} = 3 \\ e^{f(4)} = 4 \\ \ldots \\ e^{f(x)} = x \end{array}$$

On a donc :

$$x! = \Gamma(x) = e^{f(2)}.e^{f(3)}.e^{f(3)}.\ldots.e^{f(x)}$$

Mais on n'arrive vraiment pas bien à voir ce qui se passe : on a l'impression que les nombres premiers sont les points fixes d'une fonction spéciale (qui associe à un nombre laquelle de ses puissances intervient dans la factorisation de sa propre factorielle) ; ou bien on peut également considérer que les nombres premiers sont les seuls nombres qui ont pour image l'élément neutre (si on s'intéresse plutôt à la fonction qui associe à un nombre la puissance à laquelle il se trouve élevé dans la factorisation de sa propre factorielle) ; et cela a peut-être pour conséquence que les zéros sont sur la droite critique, mais tout ça n'est pas clair du tout...

Toujours est-il qu'on aimerait comprendre pourquoi le spectre de cet opérateur, si on considère qu'on a présenté ici un opérateur matriciel dont la matrice est diagonale et qui associe à un entier l'inverse de son logarithme népérien, fournit des valeurs très approchées de $\pi(x)$.