Infinité de l'ensemble des nombres premiers jumeaux

Denise Vella-Chemla

14/6/2012

1 Énoncé

On appelle *nombres premiers jumeaux* deux nombres premiers dont la différence est 2.

Exemples :

3 et 5 sont des nombres premiers jumeaux.
29 et 31 sont des nombres premiers jumeaux.

La conjecture des nombres premiers jumeaux stipule que l'ensemble des nombres premiers jumeaux est infini. On essaie ci-après de démontrer la conjecture des nombres premiers jumeaux en utilisant un argument similaire à celui d'Euclide pour démontrer l'infinité de l'ensemble des nombres premiers.

2 Euclide et l'infinité de l'ensemble des nombres premiers jumeaux

Supposons que l'ensemble des nombres premiers jumeaux

$$\mathcal{J} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, 41, 43, \ldots, j_{max}\}$$

soit fini.

Appelons j_{max} le plus grand des nombres premiers jumeaux, $j_{max} - 2$ appartient lui-aussi à $\mathcal{J}$.
On note $\#p_k$ la *primorielle* de p_k qui est le produit de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à p_k.

Intéressons-nous aux deux nombres entiers naturels $n_{moins} = \#j_{max} - 1$ et $n_{plus} = \#j_{max} + 1$.

Le second de ces deux nombres, n_{plus}, a un diviseur premier p. Cependant, p n'est pas l'un des nombres premiers inférieurs ou égaux à j_{max} car sinon p serait un diviseur de n_{plus}, du produit $\#j_{max}$, et donc aussi de leur différence $n_{plus} - \#j_{max} = 1$, ce qui est impossible (ceci est l'argument utilisé par Euclide pour prouver l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers ; il est à noter que la construction par Euclide d'un "nouveau" nombre premier de la forme $\#p_k + 1$ ne permet pas toujours d'obtenir un nombre effectivement premier. Par exemple, $2.3.5.7.11.13 = 30031 = 59.509$).

coquille : oubli du +1 après la primorielle
correction : 2.3.5.7.11.13 + 1 = 30031

Le premier de ces deux nombres, n_{moins}, a un diviseur premier p'. Cependant, p' n'est pas l'un des nombres premiers inférieurs ou égaux à j_{max} car sinon p' serait un diviseur de n_{moins}, du produit $\#j_{max}$, et donc aussi de leur différence $n_{moins} - \#j_{max} = -1$, ce qui est impossible. En fait, dit de cette manière, cela est faux car $\#j_{max} - 1$ a clairement plusieurs diviseurs. Ne peut-on dire cependant $\#j_{max} - 1$, étant congru à -1 selon tout p_k inférieur ou égal à j_{max} ne peut être premier selon le même argument qu'Euclide utilise et qui semble être équivalent à $\#j_{max}+1$ étant congru à 1 selon tout p_k inférieur ou égal à j_{max}, est premier.

On a trouvé deux nombres, nécessairement premiers, dont la différence est 2, et qui n'appartenaient pas à l'ensemble $\mathcal{J}$ initial.

Ainsi, un ensemble fini $\mathcal{J} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, 41, 43, \ldots, j_{max}\}$ ne peut constituer la collection de *tous* les nombres premiers jumeaux.