# Infinité de l'ensemble des nombres premiers jumeaux

Denise Vella-Chemla

11/6/2012

## 1 Introduction

Dans cette note, on essaie de démontrer la conjecture des nombres premiers jumeaux en utilisant un argument similaire à celui d'Euclide pour démontrer l'infinité de l'ensemble des nombres premiers. Cette approche, que l'on pourrait qualifier de lexicale, utilise des mots de représentation des entiers par leurs restes modulaires selon les nombres premiers successifs.

## 2 Énoncé

On appelle *nombres premiers jumeaux* deux nombres premiers dont la différence est 2.
*Exemples :*

3 et 5 sont des nombres premiers jumeaux.
29 et 31 sont des nombres premiers jumeaux.

La conjecture des nombres premiers jumeaux stipule que l'ensemble des nombres premiers jumeaux est infini.

## 3 Représentation par les restes

Représentons les premiers entiers naturels par leurs restes modulo les nombres premiers successifs.
Pour passer du *"mot"* d'un nombre au mot de son successeur*, on ajoute à ce mot le mot n-uplet infini $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ qui représente l'entier naturel 1.

*selon l'arithmétique de Peano

| $mod$ | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 2 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | ... |
| 3 | 1 | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | ... |
| 4 | 0 | 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | ... |
| 5 | 1 | 2 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | ... |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | ... |
| 7 | 1 | 1 | 2 | 0 | 7 | 7 | 7 | 7 | ... |
| 8 | 0 | 2 | 3 | 1 | 8 | 8 | 8 | 8 | ... |
| 9 | 1 | 0 | 4 | 2 | 9 | 9 | 9 | 9 | ... |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 3 | 10 | 10 | 10 | 10 | ... |
| 11 | 1 | 2 | 1 | 4 | 0 | 11 | 11 | 11 | ... |
| 12 | 0 | 0 | 2 | 5 | 1 | 12 | 12 | 12 | ... |
| 13 | 1 | 1 | 3 | 6 | 2 | 0 | 13 | 13 | ... |
| 14 | 0 | 2 | 4 | 0 | 3 | 1 | 14 | 14 | ... |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 | 2 | 15 | 15 | ... |
| 16 | 0 | 1 | 1 | 2 | 5 | 3 | 16 | 16 | ... |
| 17 | 1 | 2 | 2 | 3 | 6 | 4 | 0 | 17 | ... |
| 18 | 0 | 0 | 3 | 4 | 7 | 5 | 1 | 18 | ... |
| 19 | 1 | 1 | 4 | 5 | 8 | 6 | 2 | 0 | ... |
| 20 | 0 | 2 | 0 | 6 | 9 | 7 | 3 | 1 | ... |

Observons quelques représentations par les restes qui sont pertinentes par rapport à la conjecture des nombres premiers jumeaux.

6, le nombre pair juste entre les deux nombres premiers jumeaux 5 et 7 a pour représentation 0 0 1 6 6 6 .... Il a un 1 en troisième position parce que 5 a un 0 à cette position (un nombre premier est congru à 0 modulo lui-même, jamais congru à 0 modulo un nombre premier qui lui est strictement inférieur et congru à lui-même modulo tout nombre premier qui lui est strictement supérieur). 6 a un 6 en quatrième position parce que 7 a un 0 à cette position-là (le reste de 7 modulo lui-même). Les deux premières lettres du mot de représentation du nombre 6 ne sont ni des 1 ni des $p_k - 1$ (ni 1 ni 1 dans la colonne correspondant au nombre premier 2, ni 1 ni 2 dans la colonne correspondant au nombre premier 3) car si tel était le cas, l'un ou l'autre de 5 ou 7 serait composé.

18, entre 17 et 19, a pour représentation 0 0 3 4 7 5 1 18 ... : il n'a ni 1 ni $p_k - 1$ parmi ses six premières lettres, correspondant à ses restes modulo $2, 3, 5, 7, 11$ et 13. Le mot de 18 a un 1 en septième position (correspondant à son reste modulo 17 : $18 = 17 + 1$) et 18 a un reste de 18 en huitième position (correspondant à son reste modulo $19 = 18 + 1$).

Un nombre pair $p_i + 1$ juste entre deux nombres premiers jumeaux $p_i$ et $p_i + 2$ a son écriture qui se caractérise ainsi :

- elle ne contient ni 1 ni $p_k - 1$ pour tout module $p_k$ strictement inférieur à $p_i$ ;
- elle contient un 1 représentant le reste de $p_i + 1$ $(mod\, p_i)$ ;
- elle contient un $p_i + 1$ représentant le reste de $p_i + 1$ $(mod\, p_i + 2)$.

## 4 Euclide et l'infinité de l'ensemble des nombres premiers jumeaux

Supposons que l'ensemble des nombres naturels pairs juste entre deux nombres premiers jumeaux soit fini. On note dans un tableau les restes des nombres pairs en question modulo les nombres premiers successifs allant de 2 à $p_{supermax}$ où $p_{supermax}$ est le plus grand des nombres premiers inférieur à $\prod_{p_k=2}^{p_i} p_k$, $p_i$ étant quant à lui le plus grand nombre premier inférieur à $(p_{max} + 2)^2$, si $p_{max}$ est le plus grand des nombres premiers jumeaux cadets en nombre fini.

| | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | … | | … | $p_{dernier\_1}$ | … | $p_{supermax}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $pair_1 = 4$ | 0 | $\boxed{1}$ | 4 | 4 | 4 | … | | … | | … | |
| $pair_2 = 6$ | 0 | 0 | $\boxed{1}$ | 6 | 6 | … | | … | | … | |
| $pair_3 = 12$ | 0 | 0 | 2 | 5 | $\boxed{1}$ | … | | … | | … | |
| | … | … | … | … | … | … | $\boxed{1}$ | … | … | … | |
| $pair_n$ | 0 | 0 | | | … | | … | | $\boxed{1}$ | … | |

Remarquons dans le tableau l'existence d'une "sorte de diagonale" de restes 1, correspondant aux restes de nos nombres pairs en nombre fini modulo le nombre premier jumeau cadet qui est leur prédécesseur. Dans la mesure où tous les nombres premiers ne sont pas des jumeaux, un 1 d'une ligne est toujours dans une colonne à droite de celle dans laquelle se trouve le 1 de la ligne précédente, d'où l'expression "sorte de diagonale".

Inventons un nouveau nombre pair qui n'appartient pas au tableau alors qu'il aurait dû le faire. Ce nombre est $\#p_{dernier\_1}$, où $p_{dernier\_1}$ est le nombre premier précédant le dernier nombre pair recensé dans le tableau initial et où la notation $\#p_k$ désigne la "primorielle" de $p_k$, i.e. le produit de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à $p_k$. Il n'a que des restes nuls pour tous les nombres premiers compris entre 2 et $p_{dernier\_1}$. Il est plus grand que le dernier pair recensé, il est plus petit que le produit des modules compris entre 2 et $p_{supermax}$ et pourtant, il n'est pas dans le tableau recensant tous les nombres pairs juste entre deux jumeaux, supposé fini, initial.

On a inventé un ensemble de restes qui n'était pas déjà une ligne du tableau. Si notre ensemble d'ensembles de restes avait été complet, il aurait dû contenir cette nouvelle ligne or il ne la contient pas. Cela est contradictoire avec notre hypothèse de finitude de l'ensemble des nombres premiers jumeaux. L'idée du codage entraîne la contradiction. Cet ensemble de restes n'est peut-être pas le codage d'un nombre pair juste entre deux nombres premiers jumeaux : de la même manière, la construction par Euclide d'un "nouveau" nombre premier de la forme $\#p_k + 1$ ne permet pas toujours d'obtenir un nombre effectivement premier. Par exemple, $2.3.5.7.11.13 = 30031 = 59.509$. On sait cependant qu'il est inférieur au produit des modules considérés et que le théorème des restes chinois nous permettrait2*3*5+1 de le calculer.