Minplus et Floyd-Warshall, Denise Vella-Chemla, mai 2026

On fournit simplement ici deux exemples (pour $n = 6$ et $n = 12$) montrant l'application de l'algorithme de Floyd-Warshall pour remplir une matrice dans l'algèbre `minplus` ; il s'agit de faire saisir l'esprit de cet algorithme pour calculer les plus courts chemins dans un graphe. Ça correspond au fait de sommer les différentes puissances d'une matrice, dans l'algèbre `minplus`.

On rappelle que les éléments de la matrice sont mis à jour selon la formule suivante [1] :

$$M_{ij}^k = \min(M_{ij}^{k-1}, M_{ik}^{k-1} + M_{kj}^{k-1}).$$

Comme, en algèbre `minplus`, l'addition (qu'on peut noter $\oplus$) est remplacée par le min et la multiplication (qu'on peut noter $\otimes$) est remplacée par l'addition, on voit que l'écriture précédente peut être remplacée par :

$$M_{ik} = M_{i,k-1} \oplus (M_{i,k-1} \otimes M_{k-1,j}).$$

pour tout i, j, k dans $\{1, 2, \cdots, n\}$ avec n la taille de la matrice.

Appliquons l'algorithme de Floyd-Warshall pour $n = 6$ sur la matrice initiale contenant la suite des écarts 3,3 (qui sont les écarts entre les nombres $[0, 3, 6]$. Cette matrice est symétrique.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape de traitement de la ligne et de la colonne 0 : matrice inchangée.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape de traitement de la ligne et de la colonne 1 : on note d'une certaine couleur les éléments modifiés et de la même couleur les éléments dont un élément provient (il en est la somme).

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ 6 & 3 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Voir par exemple https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_Floyd-Warshall.

Étape de traitement de la ligne et de la colonne 2 (attention : utilisation de la couleur verte pour dire que 3 est utilisé avec le 6 bleu et avec le 3 jaune, ou de la couleur marron=vert+rouge !).

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & \textcolor{blue}{6} & \textcolor{blue}{9} & \infty \\ 3 & 0 & \textcolor{yellow}{3} & \textcolor{yellow}{6} & \infty \\ \textcolor{red}{6} & \textcolor{green}{3} & 0 & \textcolor{green}{3} & \infty \\ \textcolor{red}{9} & \textcolor{green}{6} & \textcolor{brown}{3} & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape de traitement de la ligne et de la colonne 3. On arrête les couleurs.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 3 & 0 & 3 \\ 12 & 9 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape de traitement de la ligne et de la colonne 4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 3 & 0 & 3 \\ 12 & 9 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a quelque chose qu'on n'a pas compris qui fait que n (ci-dessus $n = 6$) finit par apparaître quelque part dans la matrice, alors qu'il n'y était pas au départ, et c'est ce qui garantit l'existence d'une décomposition de Goldbach. Cette conjecture n'est toujours pas démontrée (elle aura 284 ans le 7 juin à venir).

II) Le cas $n = 12$. La suite des écarts est la séquence : 3,2,2,5.

raccourci $= 0$

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & 0 & 3 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 3 & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 2 & \infty & 0 & 3 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}$$

raccourci $=1$

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
3 & 0 & 3 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & 5 & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 2 & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}$$

raccourci$=2$

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & 5 & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 2 & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}$$

raccourci=3

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
7 & 4 & 7 & 2 & 5 & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & 5 & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 2 & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}$$

raccourci=4

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & i \\
7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & i \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & 5 & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 2 & i \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}$$

raccourci=5

$$
\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & 12 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & 9 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\
12 & 9 & 6 & 7 & 4 & 2 & 9 & 2 & 0 & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}
$$

raccourci=6

$$
\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & 12 & \infty & 12 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & \infty & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & \infty & 12 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & \infty & 10 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & \infty & 12 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & 9 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & \infty & 8 & 5 & \infty & \infty & \infty \\
12 & 9 & 6 & 7 & 4 & 2 & 9 & 2 & 0 & 2 & 14 & \infty & 5 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\
12 & 9 & 12 & 7 & 10 & 12 & 5 & 8 & 14 & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}
$$

raccourci=7

$$
\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & 12 & \infty & 12 & 15 & \infty & \infty & \infty \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & \infty & 9 & 12 & \infty & \infty & \infty \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & \infty & 12 & 9 & \infty & \infty & \infty \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & \infty & 7 & 10 & \infty & \infty & \infty \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & \infty & 10 & 7 & \infty & \infty & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & \infty & 12 & 9 & \infty & \infty & \infty \\
7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & 5 & \infty & 5 & 8 & \infty & \infty & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & \infty & 8 & 5 & \infty & \infty & \infty \\
12 & 9 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 10 & 7 & 5 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\
12 & 9 & 12 & 7 & 10 & 12 & 5 & 8 & 10 & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\
15 & 12 & 9 & 10 & 7 & 9 & 8 & 5 & 7 & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}
$$

raccourci=8

$$
\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & 12 & 14 & 12 & 15 & 17 & \infty & \infty \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & 11 & 9 & 12 & 14 & \infty & \infty \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & 8 & 12 & 9 & 11 & \infty & \infty \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & 9 & 7 & 10 & 12 & \infty & \infty \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & 6 & 10 & 7 & 9 & \infty & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & 4 & 12 & 9 & 7 & \infty & \infty \\
7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & 5 & 7 & 5 & 8 & 10 & \infty & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 8 & 5 & 7 & \infty & \infty \\
12 & 9 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 10 & 7 & 5 & \infty & \infty \\
14 & 11 & 8 & 9 & 6 & 4 & 7 & 4 & 2 & 0 & 12 & 9 & 7 & 5 & \infty \\
12 & 9 & 12 & 7 & 10 & 12 & 5 & 8 & 10 & 12 & 0 & 3 & 15 & \infty & \infty \\
15 & 12 & 9 & 10 & 7 & 9 & 8 & 5 & 7 & 9 & 3 & 0 & 2 & \infty & \infty \\
17 & 14 & 11 & 12 & 9 & 7 & 10 & 7 & 5 & 7 & 15 & 2 & 0 & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}
$$

raccourci=9

$$
\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & 12 & 14 & 12 & 15 & 17 & 19 & \infty \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & 11 & 9 & 12 & 14 & 16 & \infty \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & 8 & 12 & 9 & 11 & 13 & \infty \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & 9 & 7 & 10 & 12 & 14 & \infty \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & 6 & 10 & 7 & 9 & 11 & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & 4 & 12 & 9 & 7 & 9 & \infty \\
7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & 5 & 7 & 5 & 8 & 10 & 12 & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 8 & 5 & 7 & 9 & \infty \\
12 & 9 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 10 & 7 & 5 & 7 & \infty \\
14 & 11 & 8 & 9 & 6 & 4 & 7 & 4 & 2 & 0 & 12 & 9 & 7 & 5 & \infty \\
12 & 9 & 12 & 7 & 10 & 12 & 5 & 8 & 10 & 12 & 0 & 3 & 15 & 17 & \infty \\
15 & 12 & 9 & 10 & 7 & 9 & 8 & 5 & 7 & 9 & 3 & 0 & 2 & 14 & \infty \\
17 & 14 & 11 & 12 & 9 & 7 & 10 & 7 & 5 & 7 & 15 & 2 & 0 & 2 & \infty \\
19 & 16 & 13 & 14 & 11 & 9 & 12 & 9 & 7 & 5 & 17 & 14 & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}
$$

raccourci=10

$$
\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & 12 & 14 & 12 & 15 & 17 & 19 & \infty \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & 11 & 9 & 12 & 14 & 16 & \infty \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & 8 & 12 & 9 & 11 & 13 & \infty \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & 9 & 7 & 10 & 12 & 14 & \infty \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & 6 & 10 & 7 & 9 & 11 & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & 4 & 12 & 9 & 7 & 9 & \infty \\
7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & 5 & 7 & 5 & 8 & 10 & 12 & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 8 & 5 & 7 & 9 & \infty \\
12 & 9 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 10 & 7 & 5 & 7 & \infty \\
14 & 11 & 8 & 9 & 6 & 4 & 7 & 4 & 2 & 0 & 12 & 9 & 7 & 5 & \infty \\
12 & 9 & 12 & 7 & 10 & 12 & 5 & 8 & 10 & 12 & 0 & 3 & 15 & 17 & \infty \\
15 & 12 & 9 & 10 & 7 & 9 & 8 & 5 & 7 & 9 & 3 & 0 & 2 & 14 & \infty \\
17 & 14 & 11 & 12 & 9 & 7 & 10 & 7 & 5 & 7 & 15 & 2 & 0 & 2 & \infty \\
19 & 16 & 13 & 14 & 11 & 9 & 12 & 9 & 7 & 5 & 17 & 14 & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}
$$

raccourci=11

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & 12 & 14 & 12 & 15 & 17 & 19 & \infty \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & 11 & 9 & 12 & 14 & 16 & \infty \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & 8 & 12 & 9 & 11 & 13 & \infty \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & 9 & 7 & 10 & 12 & 14 & \infty \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & 6 & 10 & 7 & 9 & 11 & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & 4 & 12 & 9 & 7 & 9 & \infty \\
7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & 5 & 7 & 5 & 8 & 10 & 12 & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 8 & 5 & 7 & 9 & \infty \\
12 & 9 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 10 & 7 & 5 & 7 & \infty \\
14 & 11 & 8 & 9 & 6 & 4 & 7 & 4 & 2 & 0 & 12 & 9 & 7 & 5 & \infty \\
12 & 9 & 12 & 7 & 10 & 12 & 5 & 8 & 10 & 12 & 0 & 3 & 5 & 17 & \infty \\
15 & 12 & 9 & 10 & 7 & 9 & 8 & 5 & 7 & 9 & 3 & 0 & 2 & 14 & \infty \\
17 & 14 & 11 & 12 & 9 & 7 & 10 & 7 & 5 & 7 & 5 & 2 & 0 & 2 & \infty \\
19 & 16 & 13 & 14 & 11 & 9 & 12 & 9 & 7 & 5 & 17 & 14 & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}$$

raccourci=12

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & 12 & 14 & 12 & 15 & 17 & 19 & \infty \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & 11 & 9 & 12 & 14 & 16 & \infty \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & 8 & 12 & 9 & 11 & 13 & \infty \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & 9 & 7 & 10 & 12 & 14 & \infty \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & 6 & 10 & 7 & 9 & 11 & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & 4 & 12 & 9 & 7 & 9 & \infty \\
7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & 5 & 7 & 5 & 8 & 10 & 12 & \infty \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 8 & 5 & 7 & 9 & \infty \\
12 & 9 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 10 & 7 & 5 & 7 & \infty \\
14 & 11 & 8 & 9 & 6 & 4 & 7 & 4 & 2 & 0 & 12 & 9 & 7 & 5 & \infty \\
12 & 9 & 12 & 7 & 10 & 12 & 5 & 8 & 10 & 12 & 0 & 3 & 5 & 7 & \infty \\
15 & 12 & 9 & 10 & 7 & 9 & 8 & 5 & 7 & 9 & 3 & 0 & 2 & 4 & \infty \\
17 & 14 & 11 & 12 & 9 & 7 & 10 & 7 & 5 & 7 & 5 & 2 & 0 & 2 & \infty \\
19 & 16 & 13 & 14 & 11 & 9 & 12 & 9 & 7 & 5 & 7 & 4 & 2 & 0 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0
\end{pmatrix}$$

raccourci=13

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & 12 & 14 & 12 & 15 & 17 & 19 & 24 \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & 11 & 9 & 12 & 14 & 16 & 21 \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & 8 & 12 & 9 & 11 & 13 & 18 \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & 9 & 7 & 10 & 12 & 14 & 19 \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & 6 & 10 & 7 & 9 & 11 & 16 \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & 4 & 12 & 9 & 7 & 9 & 14 \\
7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & 5 & 7 & 5 & 8 & 10 & 12 & 17 \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 8 & 5 & 7 & 9 & 14 \\
12 & 9 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 10 & 7 & 5 & 7 & 12 \\
14 & 11 & 8 & 9 & 6 & 4 & 7 & 4 & 2 & 0 & 12 & 9 & 7 & 5 & 10 \\
12 & 9 & 12 & 7 & 10 & 12 & 5 & 8 & 10 & 12 & 0 & 3 & 5 & 7 & 12 \\
15 & 12 & 9 & 10 & 7 & 9 & 8 & 5 & 7 & 9 & 3 & 0 & 2 & 4 & 9 \\
17 & 14 & 11 & 12 & 9 & 7 & 10 & 7 & 5 & 7 & 5 & 2 & 0 & 2 & 7 \\
19 & 16 & 13 & 14 & 11 & 9 & 12 & 9 & 7 & 5 & 7 & 4 & 2 & 0 & 5 \\
24 & 21 & 18 & 19 & 16 & 14 & 17 & 14 & 12 & 10 & 12 & 9 & 7 & 5 & 0
\end{pmatrix}$$

raccourci=14 : Matrice finale

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & 12 & 14 & 12 & 15 & 17 & 19 & 24 \\
3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & 11 & 9 & 12 & 14 & 16 & 21 \\
6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & 8 & 12 & 9 & 11 & 13 & 18 \\
5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & 9 & 7 & 10 & 12 & 14 & 19 \\
8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & 6 & 10 & 7 & 9 & 11 & 16 \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & 4 & 12 & 9 & 7 & 9 & 14 \\
7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & 5 & 7 & 5 & 8 & 10 & 12 & 17 \\
10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 8 & 5 & 7 & 9 & 14 \\
12 & 9 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 10 & 7 & 5 & 7 & 12 \\
14 & 11 & 8 & 9 & 6 & 4 & 7 & 4 & 2 & 0 & 12 & 9 & 7 & 5 & 10 \\
12 & 9 & 12 & 7 & 10 & 12 & 5 & 8 & 10 & 12 & 0 & 3 & 5 & 7 & 12 \\
15 & 12 & 9 & 10 & 7 & 9 & 8 & 5 & 7 & 9 & 3 & 0 & 2 & 4 & 9 \\
17 & 14 & 11 & 12 & 9 & 7 & 10 & 7 & 5 & 7 & 5 & 2 & 0 & 2 & 7 \\
19 & 16 & 13 & 14 & 11 & 9 & 12 & 9 & 7 & 5 & 7 & 4 & 2 & 0 & 5 \\
24 & 21 & 18 & 19 & 16 & 14 & 17 & 14 & 12 & 10 & 12 & 9 & 7 & 5 & 0
\end{pmatrix}$$