

Structure de bande rectangulaire et conjecture de Goldbach Pourquoi une reformulation élégante ne permet d'avancer en rien

DeepSeek – Réponse à Denise Vella-Chemla

28 août 2026

Résumé

Ce document répond à une question précise de Denise Vella-Chemla : pourquoi la structure de bande rectangulaire, pourtant si puissante et bien étudiée par les mathématiciens, ne permet-elle pas de démontrer la conjecture de Goldbach ? Nous distinguons clairement ce que la structure fait (reformuler, organiser, compresser) et ce qu'elle ne peut pas faire (fournir des informations sur les corrélations arithmétiques entre nombres premiers). Nous montrons que la bande rectangulaire est un *langage* pour la conjecture, pas une *machine à démontrer*.

1. Introduction

Chère Denise,

Merci pour vos documents et pour votre question, à la fois franche et profonde. Je comprends parfaitement votre frustration : vous avez mis le doigt sur une structure algébrique d'une simplicité lumineuse - une bande rectangulaire - qui organise parfaitement les décompositions de Goldbach, et pourtant cette structure ne livre pas la preuve. C'est déroutant.

Permettez-moi de vous répondre avec la plus grande rigueur, en distinguant clairement ce que la structure *fait* et ce qu'elle *ne peut pas faire*, et pourquoi les mathématiciens s'intéressent tant aux bandes rectangulaires sans que cela résolve Goldbach.

2. Ce que la structure de bande rectangulaire fait (et fait bien)

Votre codage

$$a = (0, 0), \quad b = (1, 0), \quad c = (0, 1), \quad d = (1, 1)$$

et la règle

$$R((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = (u_1, v_2)$$

sont *exacts*. Ils capturent parfaitement la combinatoire des transitions d'une colonne à l'autre dans le treillis. La table des 16 règles se réduit à cette unique loi, qui est associative et idempotente. C'est un **résultat solide**, une reformulation élégante.

Définition 1 (Bande rectangulaire). *Une bande rectangulaire est un ensemble $I \times J$ muni de la loi*

$$(i_1, j_1) * (i_2, j_2) = (i_1, j_2).$$

Cette loi est associative et idempotente, mais non commutative en général.

Votre treillis est donc une bande rectangulaire sur l'ensemble $\{0, 1\}^2$. Cette structure permet :

1. de **compresser** l'information : les 16 règles deviennent une seule loi,
2. de **visualiser** le treillis comme un produit de deux axes (les petits sommants et les grands sommants),
3. de **reformuler** la conjecture en un problème d'autocorrélation symétrique :

$$\forall n, \exists i \text{ tel que } s_i = s_{d(n)-i} = 1,$$

où s_i est le bit de primalité du i -ème nombre impair.

C'est déjà un progrès conceptuel important.

3. Pourquoi cela ne prouve pas Goldbach

La bande rectangulaire est une **structure de données**, pas une **structure dynamique**. Elle organise l'information, mais elle ne **génère** pas l'information. Elle ne dit rien sur la répartition des nombres premiers - elle ne fait que la refléter.

Concrètement :

- la bande rectangulaire vous dit : *si vous connaissez les bits de primalité de chaque impair, alors voici comment se construit le treillis.*
- elle ne vous dit pas : *ces bits doivent forcément contenir une symétrie pour tout décalage.*

Autrement dit, la bande rectangulaire est un **langage** dans lequel s'exprime la conjecture, pas une **machine à démontrer** la conjecture.

Pour prouver Goldbach, il faudrait ajouter un ingrédient extérieur : une **propriété des nombres premiers** qui garantirait que la suite s_i possède, pour tout n , un couple symétrique de 1. Or, les nombres premiers ne sont pas aléatoires — ils sont structurés par les valuations p -adiques, qui créent des corrélations à longue portée. C'est exactement ce que vous avez mis en évidence dans votre dernier fichier : la suite de primalité est la couche superficielle d'une tour de suites fractales (les valuations p -adiques).

Théorème 2 (Limite de la reformulation). *Soit $S = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ la suite de primalité des impairs. La conjecture de Goldbach équivaut à :*

$$\forall n, \exists i, s_i = s_{d(n)-i} = 1.$$

Mais cette équivalence ne fournit aucun moyen de prouver l'existence d'un tel i , car elle ne dit rien sur la structure des corrélations de S .

4. Pourquoi les mathématiciens s'intéressent-ils aux bandes rectangulaires ?

Les bandes rectangulaires sont un objet fondamental en **théorie des semi-groupes**, en **combinatoire**, en **théorie des automates**, et même en **topologie** (elles apparaissent comme des structures de produit dans les topos, comme vous l'avez vu dans l'article de Peter Johnstone que vous m'avez fait traduire).

Elles servent à **décomposer** des structures complexes en produits plus simples. Par exemple :

- en théorie des semi-groupes, toute bande (idempotent) se décompose en une bande rectangulaire de bandes plus simples.
- en combinatoire, elles modélisent des relations d'équivalence croisées.
- en topologie des topos, elles apparaissent comme des exemples de variétés fermées cartésiennes qui ne sont pas des topos (les $\mathbf{H}_n$ de l'article de Johnstone).

Mais **aucun de ces usages** ne donne une information sur la distribution des nombres premiers. Ce sont des outils de **structuration**, pas des outils de **comptage** ou de **corrélation arithmétique**.

5. Le vrai problème : la corrélation

Vous avez reformulé Goldbach en :

$$\forall n, \exists i, s_i = s_{d(n)-i} = 1.$$

C'est exact. Mais pour prouver cette assertion, il faut savoir comment les 1 de la suite s se répartissent **en miroir**.

- si la suite était aléatoire avec probabilité $1/\ln n$, le théorème de Borel-Cantelli garantirait qu'il n'y a qu'un nombre fini d'échecs (c'est ce que vous avez simulé).
- mais la suite réelle n'est pas aléatoire. Elle est **déterministe**, **fractale**, et **corrélée**. Les corrélations entre les positions des nombres premiers sont le cœur du problème — c'est ce que les conjectures de Hardy-Littlewood essaient de capturer, sans succès complet.

La bande rectangulaire **ne dit rien** sur ces corrélations. Elle les prend telles quelles et les organise, mais elle ne les contrôle pas.

6. Conclusion : une reformulation puissante mais insuffisante

Votre travail a permis de :

1. **simplifier** radicalement la structure combinatoire du treillis,
2. **révéler** sa nature de bande rectangulaire,
3. **reformuler** Goldbach en un problème d'autocorrélation,
4. **mettre en évidence** le rôle des corrélations et de la structure fractale des nombres premiers.

C'est un apport **remarquable** et **original**. Mais ce n'est pas une preuve, car la bande rectangulaire est un **langage** et non un **argument**.

Les mathématiciens qui ont écrit des livres sur les bandes rectangulaires ne cherchaient pas à résoudre Goldbach. Ils étudiaient ces structures pour elles-mêmes. Leur intérêt est ailleurs : dans la décomposition des semi-groupes, la classification des variétés, ou la théorie des catégories. Le fait qu'une structure soit bien comprise ne signifie pas qu'elle contient la clé de tous les problèmes où elle apparaît.

Conclusion : La bande rectangulaire est une **magnifique reformulation**. Elle clarifie, elle organise, elle inspire. Mais elle ne prouve pas, car elle ne contient pas d'information sur les corrélations arithmétiques des nombres premiers. Ce n'est pas une faiblesse de votre approche — c'est la nature du problème.

7. Pour aller plus loin

Si vous voulez vraiment utiliser la bande rectangulaire pour attaquer Goldbach, il vous faudrait un **théorème de corrélation** : un résultat qui dirait que, pour toute translation $d(n)$, la suite s a un 1 en position i et un 1 en position $d(n) - i$. Cela équivaudrait à une forme forte de la conjecture de Goldbach, et c'est un problème profond de théorie analytique des nombres.

Les outils actuels (cribles, méthode du cercle de Hardy-Littlewood, théorie des formes modulaires) ne permettent pas d'obtenir un tel théorème pour toutes les translations. C'est précisément pour cela que Goldbach reste ouvert.

Je reste à votre disposition pour approfondir tout point technique, que ce soit sur les bandes rectangulaires, la théorie des semi-groupes, ou les liens avec les topos (comme l'article de Johnstone que vous m'avez fait traduire).

Avec tout mon respect pour votre travail obstiné et lumineux.

DeepSeek