Espace (Denise Vella-Chemla, 19.10.2017)
On constate par programme que, si on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $\pi(N)$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs à N :

$$\sum_{p \in \mathcal{P},\ p \leqslant N} e^{\frac{2i\pi}{p}} \simeq \pi(N) + i\ ln(N)$$

On obtient par ce calcul une valeur de 78492 pour la partie réelle du membre gauche de l'égalité quand le nombre de nombres premiers inférieurs à 10^6 (le membre droit de l'égalité) est égal à 78498 (l'erreur est de $\frac{6}{10^6} = 0,000006$). Que la partie réelle du complexe obtenu vaille $\pi(N)$ est normal : les dénominateurs croissant, l'angle du complexe $e^{\frac{2i\pi}{p}}$ est de plus en plus minuscule et l'extrémité de l'angle sur le cercle unité se rapproche de plus en plus de 1. On aimerait comprendre pourquoi la partie imaginaire est égale au logarithme népérien.
On définit l'espace des matrices infinies diagonales de la forme :

$$\begin{pmatrix} exp(\frac{\mathbf{x1}.2i\pi}{2}) & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & exp(\frac{\mathbf{x2}.2i\pi}{3}) & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & exp(\frac{\mathbf{x3}.2i\pi}{5}) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & exp(\frac{\mathbf{x4}.2i\pi}{7}) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

A un nombre entier n quelconque est associée la matrice

$$\begin{pmatrix} exp(\frac{\mathbf{k1}.2i\pi}{2}) & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & exp(\frac{\mathbf{k2}.2i\pi}{3}) & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & exp(\frac{\mathbf{k3}.2i\pi}{5}) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & exp(\frac{\mathbf{k4}.2i\pi}{7}) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

avec $n \equiv k_p$ dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Par exemple, on associe à 11 (de restes (1,2,1,4,0,...) modulo (2,3,5,7,11,...)) la matrice :

$$\begin{pmatrix} exp(\frac{\mathbf{1}.2i\pi}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & exp(\frac{\mathbf{2}.2i\pi}{3}) & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & exp(\frac{\mathbf{1}.2i\pi}{5}) & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & exp(\frac{\mathbf{4}.2i\pi}{7}) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Les nombres premiers n'ont qu'un seul 1 sur leur diagonale.

L'opérateur $Succ(n)$ de l'arithmétique de Peano (l'addition de 1 à n) correspond à la multiplication dans l'espace des matrices de la matrice associé à n par la matrice (que l'on appelle $PlusUn$) dont tous les k_i valent 1.

$$PlusUn = \begin{pmatrix} exp(\frac{2i\pi}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & exp(\frac{2i\pi}{3}) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & exp(\frac{2i\pi}{5}) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & exp(\frac{2i\pi}{7}) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On calcule par programme les traces successives des portions finies hautes-gauches de la matrice carrée $PlusUn$; ce sont les sommes partielles successives des éléments diagonaux de $PlusUn$.
Pour les nombres premiers jusqu'à 97, cette somme est égale à $19.8703 + 6.46254i$.
Pour les nombres premiers inférieurs à 10^7, elle vaut $664577 + 8.73825i$.
A cause du Théorème des nombres premiers d'Hadamard et La Vallée-Poussin, on remplace chaque p dans les $e^{\frac{2i\pi}{p}}$ par $\frac{p}{ln\ p}$, on obtient $\sum_{p\in\mathcal{P},\ p\leqslant N} e^{\frac{2i\pi\ ln\ p}{p}}$ soit $\sum_{p\in\mathcal{P},\ p\leqslant N} \left(\left(e^{ln\ p}\right)^{\frac{2i\pi}{n}}\right)$ soit $\sum_{p\in\mathcal{P},\ p\leqslant N} n^{\frac{2i\pi}{n}} = \sum_{p\in\mathcal{P},\ p\leqslant N} \sqrt[n]{n^{2i\pi}}$. On vérifie par programme qu'on obtient sensiblement les mêmes valeurs que grâce à la formule précédente, avec le petit escalier de 1 en 1 à chaque nombre premier.
Pour le montrer, on reproduit simplement ici les lignes du début et les lignes de la fin de l'exécution du programme, jusqu'à 10^6, qui montre le logarithme en partie imaginaire.

$2 \rightarrow (-1, 1.22465e - 16)$
$3 \rightarrow (-1.5, 0.866025)$
$5 \rightarrow (-1.19098, 1.81708)$
$7 \rightarrow (-0.567493, 2.59891)$
$11 \rightarrow (0.27376, 3.13955)$
$13 \rightarrow (1.15922, 3.60428)$
$17 \rightarrow (2.09169, 3.96552)$
$19 \rightarrow (3.03751, 4.29022)$
$23 \rightarrow (4.00042, 4.56002)$
$29 \rightarrow (4.97704, 4.77499)$
$31 \rightarrow (5.95657, 4.97628)$
$37 \rightarrow (6.94219, 5.14529)$
$41 \rightarrow (7.93047, 5.29793)$
$43 \rightarrow (8.91981, 5.44354)$
$47 \rightarrow (9.91089, 5.57682)$
$53 \rightarrow (10.9039, 5.6951)$
$59 \rightarrow (11.8982, 5.80139)$
$61 \rightarrow (12.8929, 5.90421)$
$67 \rightarrow (13.8885, 5.99785)$
$71 \rightarrow (14.8846, 6.08623)$
$73 \rightarrow (15.8809, 6.1722)$
$79 \rightarrow (16.8777, 6.25165)$
$83 \rightarrow (17.8749, 6.32728)$
$89 \rightarrow (18.8724, 6.39781)$
$97 \rightarrow (19.8703, 6.46254)$
$101 \rightarrow (20.8683, 6.52471)$
$103 \rightarrow (21.8665, 6.58568)$
....

$99563 \rightarrow (78465.8, 13.2761)$
$999599 \rightarrow (78466.8, 13.2761)$
$999611 \rightarrow (78467.8, 13.2762)$
$999613 \rightarrow (78468.8, 13.2762)$
$999623 \rightarrow (78469.8, 13.2762)$
$999631 \rightarrow (78470.8, 13.2762)$
$999653 \rightarrow (78471.8, 13.2762)$
$999667 \rightarrow (78472.8, 13.2762)$
$999671 \rightarrow (78473.8, 13.2762)$
$999683 \rightarrow (78474.8, 13.2762)$
$999721 \rightarrow (78475.8, 13.2762)$
$999727 \rightarrow (78476.8, 13.2762)$
$999749 \rightarrow (78477.8, 13.2762)$
$999763 \rightarrow (78478.8, 13.2762)$
$999769 \rightarrow (78479.8, 13.2762)$
$999773 \rightarrow (78480.8, 13.2762)$
$999809 \rightarrow (78481.8, 13.2762)$
$999853 \rightarrow (78482.8, 13.2762)$
$999863 \rightarrow (78483.8, 13.2763)$
$999883 \rightarrow (78484.8, 13.2763)$
$999907 \rightarrow (78485.8, 13.2763)$
$999917 \rightarrow (78486.8, 13.2763)$
$999931 \rightarrow (78487.8, 13.2763)$
$999953 \rightarrow (78488.8, 13.2763)$
$999959 \rightarrow (78489.8, 13.2763)$
$999961 \rightarrow (78490.8, 13.2763)$
$999979 \rightarrow (78491.8, 13.2763)$
$999983 \rightarrow (78492.8, 13.2763)$

Un internaute[1] du forum les-mathematiques.net m'a indiqué que la somme d'exponentielles $\sum\limits_{p \in \mathcal{P},\ p \leqslant N} e^{\frac{2i\pi}{p}}$ avait pour partie imaginaire un nombre approximativement égal à $2\pi\ cos(1) ln(ln(N))$, on peut le vérifier par programme.

[1] bisam