C'est extra !

Denise Vella-Chemla

28/11/2012

1 Rappels

On se rappelle que dans la démonstration de l'infinité des nombres premiers d'Euclide, le nombre utilisé pour aboutir à une contradiction est égal au produit de tous les nombres premiers (dont on fait l'hypothèse de départ qu'ils sont en nombre fini) augmenté de 1. Ce nombre a comme propriété d'être congru à 1 selon chaque nombre premier du produit considéré comme module.

La conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers.

Rappelons ici qu'un décomposant de Goldbach d'un nombre pair donné x doit vérifier deux propriétés : la première est qu'il doit être premier, la seconde est qu'il ne doit être congru à x selon aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{x}$, ce qui garantit que son complémentaire à x est premier également.

Rappelons enfin que le nombre obtenu en ôtant un multiple de 6 à un nombre a les mêmes restes que (est congru à) ce nombre selon les modules 2 et 3. De même, le nombre obtenu en ôtant un multiple de 30 à un nombre a les mêmes restes que (est congru à) ce nombre selon les modules 2, 3 et 5.

Dernier élément utile : un nombre entier n'est jamais congru à son prédécesseur ou son successeur (au sens de Peano) selon aucun module.

2 Voir les décomposants de Goldbach de x comme appartenant à des progressions arithmétiques depuis le nombre $x+1$ ou depuis le nombre $x-1$

On considère les nombres pairs de 8 à 100 (ainsi que 200 et 500). Pour chacun d'eux, on fournit ses décomposants de Goldbach (les nombres premiers p tels que $x = p + q$ avec q premier également). A côté de chacun de ces décomposants, on note l'opération arithmétique qui permet de l'obtenir, depuis $x+1$ ou $x-1$ et en soustrayant un multiple de 6 (de façon à conserver les restes modulo 2 et 3)*. On notera en rouge les nombres appartenant à une progression arithmétique décroissante de début $x+1$ et en bleu ceux de la progression arithmétique de début $x-1$†.

Si l'on voulait aboutir à une preuve de la conjecture de Goldbach, il faudrait être capable de démontrer que ces multiples nombres, appartenant tous à un même intervalle (l'intervalle $[3, x/2]$) ainsi qu'à l'une de ces deux seules progressions arithmétiques, ne peuvent être congrus entre eux modulo les modules plus grands que 2 et 3, et que l'un d'eux étant ainsi incongru à x selon tout module fournit une décomposition de Goldbach de x.

*Les nombres marqués d'une astérisque sont des doubles de nombres premiers et vérifient donc trivialement la conjecture de Goldbach.

†Pour mémoire, on note d'une étoile en fin de ligne les décomposants de Goldbach de x qui sont des "petits premiers", i.e. des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{x}$.

x	$=$	$p+q$	$p=$	$x \pm 1 - 6k$	
8	$=$	$3+5$	$3=$	$8+1-6$	
$10*$	$=$	$3+7$	$3=$	$10-1-6$	$*$
	$=$	$5+5$	$5=$	$10+1-6$	
12	$=$	$5+7$	$5=$	$12-1-6$	
$14*$	$=$	$3+11$	$3=$	$14+1-12$	$*$
	$=$	$7+7$	$7=$	$14-1-6$	
16	$=$	$3+13$	$3=$	$16-1-12$	$*$
	$=$	$5+11$	$5=$	$16+1-12$	
18	$=$	$5+13$	$5=$	$18-1-12$	
	$=$	$7+11$	$7=$	$18+1-12$	
20	$=$	$3+17$	$3=$	$20+1-18$	$*$
	$=$	$7+13$	$7=$	$20-1-12$	
$22*$	$=$	$3+19$	$3=$	$22-1-18$	$*$
	$=$	$5+17$	$5=$	$22+1-18$	
	$=$	$11+11$	$11=$	$22+1-12$	
24	$=$	$5+19$	$5=$	$24-1-18$	
	$=$	$7+17$	$7=$	$24+1-18$	
	$=$	$11+13$	$11=$	$24-1-12$	
$26*$	$=$	$3+23$	$3=$	$26+1-24$	$*$
	$=$	$7+19$	$7=$	$26-1-18$	
	$=$	$13+13$	$13=$	$26-1-12$	
28	$=$	$5+23$	$5=$	$28+1-24$	$*$
	$=$	$11+17$	$11=$	$28+1-18$	
30	$=$	$7+23$	$7=$	$30+1-24$	
	$=$	$11+19$	$11=$	$30-1-18$	
	$=$	$13+17$	$13=$	$30+1-18$	
32	$=$	$3+29$	$3=$	$32-1-18$	$*$
	$=$	$13+19$	$13=$	$32-1-18$	
$34*$	$=$	$3+31$	$3=$	$34-1-30$	$*$
	$=$	$5+29$	$5=$	$34+1-30$	$*$
	$=$	$11+23$	$11=$	$34+1-24$	
	$=$	$17+17$	$17=$	$34+1-18$	
36	$=$	$5+31$	$5=$	$36-1-30$	$*$
	$=$	$7+29$	$7=$	$36+1-30$	
	$=$	$13+23$	$13=$	$36+1-24$	
	$=$	$17+19$	$17=$	$36-1-18$	
$38*$	$=$	$7+31$	$7=$	$38-1-30$	
	$=$	$19+19$	$19=$	$38-1-18$	
40	$=$	$3+37$	$3=$	$40-1-36$	$*$
	$=$	$11+29$	$11=$	$40+1-30$	
	$=$	$17+23$	$17=$	$40+1-24$	
42	$=$	$5+37$	$5=$	$42-1-36$	$*$
	$=$	$11+31$	$11=$	$42-1-30$	
	$=$	$13+29$	$13=$	$42+1-30$	
	$=$	$19+23$	$19=$	$42+1-24$	
44	$=$	$3+41$	$3=$	$44+1-42$	$*$
	$=$	$7+37$	$7=$	$44-1-36$	
	$=$	$13+31$	$13=$	$44-1-30$	
$46*$	$=$	$3+43$	$3=$	$46-1-42$	$*$
	$=$	$5+41$	$5=$	$46+1-42$	$*$
	$=$	$17+29$	$17=$	$46+1-30$	
	$=$	$23+23$	$23=$	$46+1-24$	
48	$=$	$5+43$	$5=$	$48-1-42$	$*$
	$=$	$7+41$	$7=$	$48+1-42$	
	$=$	$11+37$	$11=$	$48-1-36$	
	$=$	$17+31$	$17=$	$48-1-30$	
	$=$	$19+29$	$19=$	$48+1-30$	

50	=	$3+47$	$3=$	$50+1-48$	$*$
	=	$7+43$	$7=$	$50-1-42$	$*$
	=	$13+37$	$13=$	$50-1-36$	
	=	$19+31$	$19=$	$50-1-30$	
52	=	$5+47$	$5=$	$52+1-48$	$*$
	=	$11+41$	$11=$	$52+1-42$	
	=	$23+29$	$23=$	$52+1-30$	
54	=	$7+47$	$7=$	$54+1-48$	$*$
	=	$11+43$	$11=$	$54-1-42$	
	=	$13+41$	$13=$	$54+1-42$	
	=	$17+37$	$17=$	$54-1-36$	
	=	$23+31$	$23=$	$54-1-30$	
56	=	$3+53$	$3=$	$56+1-54$	$*$
	=	$13+43$	$13=$	$56-1-42$	
	=	$19+37$	$19=$	$56-1-36$	
$58*$	=	$5+53$	$5=$	$58+1-54$	$*$
	=	$11+47$	$11=$	$58+1-48$	
	=	$17+41$	$17=$	$58+1-42$	
	=	$29+29$	$29=$	$58+1-30$	
60	=	$7+53$	$7=$	$60+1-54$	$*$
	=	$13+47$	$13=$	$60+1-48$	
	=	$17+43$	$17=$	$60-1-42$	
	=	$19+41$	$19=$	$60+1-42$	
	=	$23+37$	$23=$	$60-1-36$	
	=	$29+31$	$29=$	$60-1-30$	
$62*$	=	$3+59$	$3=$	$62+1-60$	$*$
	=	$19+43$	$19=$	$62-1-42$	
	=	$31+31$	$31=$	$62-1-30$	
64	=	$3+61$	$3=$	$64-1-60$	$*$
	=	$5+59$	$5=$	$64+1-60$	$*$
	=	$11+53$	$11=$	$64+1-54$	
	=	$17+47$	$17=$	$64+1-48$	
	=	$23+41$	$23=$	$64+1-42$	
66	=	$5+61$	$5=$	$66-1-60$	$*$
	=	$7+59$	$7=$	$66+1-60$	$*$
	=	$13+53$	$13=$	$66+1-54$	
	=	$19+47$	$19=$	$66+1-48$	
	=	$23+43$	$23=$	$66-1-42$	
	=	$29+37$	$29=$	$66-1-36$	
68	=	$7+61$	$7=$	$68-1-60$	$*$
	=	$31+37$	$31=$	$68-1-36$	
70	=	$3+67$	$3=$	$70-1-66$	$*$
	=	$11+59$	$11=$	$70+1-60$	
	=	$17+53$	$17=$	$70+1-54$	
	=	$23+47$	$23=$	$70+1-48$	
	=	$29+41$	$29=$	$70+1-42$	
72	=	$5+67$	$5=$	$72-1-66$	$*$
	=	$11+61$	$11=$	$72-1-60$	
	=	$13+59$	$13=$	$72+1-60$	
	=	$19+53$	$19=$	$72+1-54$	
	=	$29+43$	$29=$	$72-1-42$	
	=	$31+41$	$31=$	$72+1-42$	
$74*$	=	$3+71$	$3=$	$74+1-72$	$*$
	=	$7+67$	$7=$	$74-1-66$	$*$
	=	$13+61$	$13=$	$74-1-60$	
	=	$31+43$	$31=$	$74-1-42$	
	=	$37+37$	$37=$	$74-1-36$	

76	=	$3+73$	$3 =$	$76-1-72$	*
	=	$5+71$	$5 =$	$76+1-72$	*
	=	$17+59$	$17 =$	$76+1-60$	
	=	$23+53$	$23 =$	$76+1-54$	
	=	$29+47$	$29 =$	$76+1-48$	
78	=	$5+73$	$5 =$	$78-1-72$	*
	=	$7+71$	$7 =$	$78+1-72$	*
	=	$11+67$	$11 =$	$78-1-66$	
	=	$17+61$	$17 =$	$78-1-60$	
	=	$19+59$	$19 =$	$78+1-60$	
	=	$31+47$	$31 =$	$78+1-48$	
	=	$37+41$	$37 =$	$78+1-42$	
80	=	$7+73$	$7 =$	$80-1-72$	*
	=	$13+67$	$13 =$	$80-1-66$	
	=	$19+61$	$19 =$	$80-1-60$	
	=	$37+43$	$37 =$	$80-1-42$	
82*	=	$3+79$	$3 =$	$82-1-78$	*
	=	$11+71$	$11 =$	$82+1-72$	
	=	$23+59$	$23 =$	$82+1-60$	
	=	$29+53$	$29 =$	$82+1-54$	
	=	$41+41$	$41 =$	$82+1-42$	
84	=	$5+79$	$5 =$	$84-1-78$	*
	=	$11+73$	$11 =$	$84-1-72$	
	=	$13+71$	$13 =$	$84+1-72$	
	=	$17+67$	$17 =$	$84-1-66$	
	=	$23+61$	$23 =$	$84-1-60$	
	=	$31+53$	$31 =$	$84+1-54$	
	=	$37+47$	$37 =$	$84+1-48$	
	=	$41+43$	$41 =$	$84-1-42$	
86*	=	$3+83$	$3 =$	$86+1-84$	*
	=	$7+79$	$7 =$	$86-1-78$	*
	=	$13+73$	$13 =$	$86-1-72$	
	=	$19+67$	$19 =$	$86-1-66$	
	=	$43+43$	$43 =$	$86-1-42$	
88	=	$5+83$	$5 =$	$88+1-84$	*
	=	$17+71$	$17 =$	$88+1-72$	
	=	$29+59$	$29 =$	$88+1-60$	
	=	$41+47$	$41 =$	$88+1-48$	
90	=	$7+83$	$7 =$	$90+1-84$	*
	=	$11+79$	$11 =$	$90-1-78$	
	=	$17+73$	$17 =$	$90-1-72$	
	=	$19+71$	$19 =$	$90+1-72$	
	=	$23+67$	$23 =$	$90-1-66$	
	=	$29+61$	$29 =$	$90-1-60$	
	=	$31+59$	$31 =$	$90+1-60$	
	=	$37+53$	$37 =$	$90+1-54$	
	=	$43+47$	$43 =$	$90+1-48$	
92	=	$3+89$	$3 =$	$92+1-90$	*
	=	$13+79$	$13 =$	$92-1-78$	
	=	$19+73$	$19 =$	$92-1-72$	
	=	$31+61$	$31 =$	$92-1-60$	
94*	=	$5+89$	$5 =$	$94+1-90$	*
	=	$11+83$	$11 =$	$94+1-84$	
	=	$23+71$	$23 =$	$94+1-72$	
	=	$41+53$	$41 =$	$94+1-54$	
	=	$47+47$	$47 =$	$94+1-48$	

96	=	$7+89$	$7=$	$96+1-90$	$*$
	=	$13+83$	$13=$	$96+1-84$	
	=	$17+79$	$17=$	$96-1-78$	
	=	$23+73$	$23=$	$96-1-72$	
	=	$29+67$	$29=$	$96-1-66$	
	=	$37+59$	$37=$	$96+1-60$	
	=	$43+53$	$43=$	$96+1-54$	
98	=	$19+79$	$19=$	$98-1-78$	
	=	$31+67$	$31=$	$98-1-66$	
	=	$37+61$	$37=$	$98-1-60$	
100	=	$3+97$	$3=$	$100-1-96$	$*$
	=	$11+89$	$11=$	$100+1-90$	
	=	$17+83$	$17=$	$100+1-84$	
	=	$29+71$	$29=$	$100+1-72$	
	=	$41+59$	$41=$	$100+1-60$	
	=	$47+53$	$47=$	$100+1-54$	
200	=	$3+197$	$3=$	$200+1-198$	$*$
	=	$7+193$	$7=$	$200-1-192$	$*$
	=	$19+181$	$19=$	$200-1-180$	
	=	$37+163$	$37=$	$200-1-162$	
	=	$43+157$	$43=$	$200-1-156$	
	=	$61+139$	$61=$	$200-1-138$	
	=	$73+127$	$73=$	$200-1-126$	
	=	$97+103$	$97=$	$200-1-102$	
500	=	$13+487$	$13=$	$500-1-486$	$*$
	=	$37+463$	$37=$	$500-1-462$	
	=	$43+457$	$43=$	$500-1-456$	
	=	$61+439$	$61=$	$500-1-438$	
	=	$67+433$	$67=$	$500-1-432$	
	=	$79+421$	$79=$	$500-1-420$	
	=	$103+397$	$103=$	$500-1-396$	
	=	$127+373$	$127=$	$500-1-372$	
	=	$151+349$	$151=$	$500-1-348$	
	=	$163+337$	$163=$	$500-1-336$	
	=	$193+307$	$193=$	$500-1-306$	
	=	$223+277$	$223=$	$500-1-276$	
	=	$229+271$	$229=$	$500-1-270$	

Comme attendu, on voit que les nombres pairs divisibles par 3 (les $6k$) peuvent avoir des décomposants de Goldbach dans les deux progressions issues de $x+1$ ou $x-1$. Les nombres congrus à 1 selon le module 3 (les $6k+4$) n'ont des décomposants que dans la progression arithmétique d'origine $x+1$ tandis que ceux congrus à -1 selon le module 3 (les $6k+2$) n'ont des décomposants que dans la progression arithmétique d'origine $x-1$.

Ci-dessous, deux extraits de fichiers qui fournissent pour les 26 nombres pairs avant 10^7 et les 26 nombres pairs avant 10^8 leur nombre de décomposants de Goldbach, qui corroborent le fait que les $3x$ ont à peu près deux fois plus de décomposants de Goldbach que les $3x+1$ et $3x+2$ autour d'eux[‡].

[‡]Un grand merci à Daniel Diaz qui a écrit toute une série de logiciels dédiés à la conjecture de Goldbach.

x	$NbDG(x)$
9999950	38844
9999952	28964
9999954	60233
9999956	29255
9999958	29252
9999960	77889
9999962	34722
9999964	31851
9999966	61357
9999968	32128
9999970	38917
9999972	58510
9999974	29529
9999976	34915
9999978	63738
9999980	40437
9999982	29849
9999984	58268
9999986	30897
9999988	29153
9999990	116066
9999992	29047
9999994	29790
9999996	58553
9999998	28983
10000000	38807

x	$NbDG(x)$
99999950	315647
99999952	249991
99999954	436893
99999956	262390
99999958	220947
99999960	586429
99999962	218881
99999964	232440
99999966	489663
99999968	218402
99999970	349724
99999972	437909
99999974	224860
99999976	223368
99999978	477314
99999980	291440
99999982	218411
99999984	583321
99999986	226167
99999988	242838
99999990	585327
99999992	218826
99999994	218773
99999996	437175
99999998	274787
100000000	291400

Faisons apparaître dans le tableau ci-dessous les trois progressions arithmétiques de 6 en 6 à partir de 8, 10 ou 12 dont les nombres x partagent systématiquement un décomposant de Goldbach avec $x + 6$. Les premières lignes du tableau concernent la première progression arithmétique contenant les nombres de la forme $8 + 6k$ (ou $6k + 2$) et les décomposants partagés par un nombre et son successeur dans cette progression dans les lignes qui suivent. Les lignes 5 et suivantes concernent les nombres de la progression arithmétique $10 + 6k$ (ou $6k + 4$) et les lignes 8 et suivantes concernent ceux de la progression $12 + 6k$ (ou $6k$).

8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98
3	3	3	3	3		3	3	3	3		3		3	3	
				7	7	7			31	31	31			19	19
											7	7	7		
10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100
3	3	3		3	3	3			3	3	3	3			3
		5	5	5		5	5	5	5			41	41	41	41
12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	
5	5	5		5	5	5			5	5	5	5			
		7	7	7		7	7	7	7			17	17	17	

La conjecture : "x supérieur à 6 partage toujours un décomposant de Goldbach avec $x + 6$" (i.e. $x = p + q, x + 6 = p + q'$ *avec* p, q *et* q' *premiers*) a été vérifiée par ordinateur jusqu'à 16.10^8. Elle s'explique par le fait que l'un des nombres premiers décomposants de Goldbach de x étant non congru à x selon tout module inférieur à $\sqrt{x}$, aura vraiment toutes les chances d'être également non congru à $x + 6$ selon tout module inférieur à $\sqrt{x+6}$.

3 Exemple du nombre pair 500 : détail de l'application du double crible

On détaille ici pour le nombre pair 500 ce qu'on pourrait appeler l'application du double crible :
1) la première application du crible consiste à éliminer les nombres congrus à 0 selon un module premier inférieur ou égal à $\sqrt{x}$ (de manière à éliminer les nombres composés et les petits premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{x}$) ;
2) la deuxième application du crible consiste à éliminer les nombres congrus à x selon un module premier inférieur ou égal à $\sqrt{x}$.

500 étant congru à 2 selon le module 3, les seuls nombres à considérer sont ceux appartenant à la progression arithmétique d'origine $500 - 1$.

On note dans la deuxième colonne le passage de la première passe du crible (élimination des nombres congrus à 0 selon un module inférieur ou égal à $\sqrt{x} = 22, ...$). Les modules à considérer sont 5, 7, 11, 13, 17, 19.

On note dans la troisième colonne le passage de la seconde passe du crible en notant entre parenthèse la congruence partagée avec x.
500 est congru à $0 \ (mod\ 5),\ 3 \ (mod\ 7),\ 5 \ (mod\ 11),\ 6 \ (mod\ 13),\ 7 \ (mod\ 17)\ et\ 6 \ (mod\ 19)$.

Les couleurs permettent de bien visualiser les périodicités.

7	$0 \ (mod\ 7)$	$7 \ (mod\ 17)$
13	$0 \ (mod\ 13)$	
19	$0 \ (mod\ 19)$	$6 \ (mod\ 13)$
25	$0 \ (mod\ 5)$	$6 \ (mod\ 19)$
31		$3 \ (mod\ 7)$
37		
43		
49	$0 \ (mod\ 7)$	$5 \ (mod\ 11)$
55	$0 \ (mod\ 5\ et\ 11)$	
61		
67		
73		$3 \ (mod\ 7)$
79		
85	$0 \ (mod\ 5\ et\ 17)$	
91	$0 \ (mod\ 7\ et\ 13)$	
97		$6 \ (mod\ 13)$
103		
109		$7 \ (mod\ 17)$
115	$0 \ (mod\ 5)$	$3 \ (mod\ 7)$ $et\ 5 \ (mod\ 11)$
121	$0 \ (mod\ 11)$	
127		
133	$0 \ (mod\ 7\ et\ 19)$	
139		$6 \ (mod\ 19)$
145	$0 \ (mod\ 5)$	
151		
157		$3 \ (mod\ 7)$
163		
169	$0 \ (mod\ 13)$	
175	$0 \ (mod\ 5\ et\ 7)$	$6 \ (mod\ 13)$
181		$5 \ (mod\ 11)$
187	$0 \ (mod\ 11\ et\ 17)$	
193		
199		$3 \ (mod\ 7)$
205	$0 \ (mod\ 5)$	
211		$7 \ (mod\ 17)$
217	$0 \ (mod\ 7)$	
223		
229		