

La fonction zêta de Riemann (pages 41-48)

5. La fonction zêta de Riemann

Les formules de type trace existent non seulement pour les systèmes dynamiques mais aussi pour la fonction zêta de Riemann (et d'autres fonctions zêta de la théorie des nombres également).

La fonction zêta de Riemann est une fonction de la variable complexe s définie comme suit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \quad (36)$$

où le produit est pris sur les nombres premiers. La seconde égalité (appelée produit d'Euler) est une conséquence de l'unicité de la factorisation des entiers en produit de nombres premiers.

Cette fonction converge seulement lorsque $\operatorname{Re} s > 1$ mais peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe s .

5.1. Équation fonctionnelle

La possibilité de ce prolongement est liée au fait que la fonction zêta de Riemann satisfait l'importante équation fonctionnelle

$$\zeta(s) = \phi(s)\zeta(1-s) \quad (37)$$

où

$$\phi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s). \quad (38)$$

Nous présentons l'une des nombreuses méthodes de démonstration de cette relation (voir par exemple [55]). Lorsque $\operatorname{Re} s > 0$, on a l'égalité

$$\int_0^{\infty} x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x} dx = \frac{\Gamma(s/2)}{n^s \pi^{s/2}}$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma (voir par exemple [32], Vol. 1, Sect. 1). Par conséquent, si $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\frac{\Gamma(s/2)\zeta(s)}{\pi^{s/2}} = \int_0^{\infty} x^{s/2-1} \Psi(x) dx$$

où $\Psi(x)$ est donné par la série suivante

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Référence : E. Bogomolny, "Quantum and Arithmetical Chaos", dans P. Cartier, B. Julia, P. Moussa et P. Vanhove (éd.), *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry I : On Random Matrices, Zeta Functions, and Dynamical Systems*, Springer, 2006, p. 41-48 et 94-98.

Transcription, traduction : Denise Vella-Chemla et deepseek, 7 octobre 2026.

En utilisant la formule de sommation de Poisson (5), on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 / x}$$

ce qui conduit à l'identité

$$2\Psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(2\Psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \xi(s) &\equiv \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \zeta(s) = \int_0^1 x^{s/2} \Psi(x) dx + \int_1^\infty x^{s/2} \Psi(x) dx \\ &= \int_0^1 x^{s/2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \Psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right) dx + \int_1^\infty x^{s/2} \Psi(x) dx \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_0^1 x^{s/2-3/2} \Psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_1^\infty x^{s/2} \Psi(x) dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-s/2-1/2} + x^{s/2-1} \right) \Psi(x) dx. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est convergente pour toutes les valeurs de s et donne le prolongement analytique de la fonction zêta de Riemann à tout le plan complexe s , la seule singularité étant le pôle en $s = 1$ avec un résidu unité

$$\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1} \frac{1}{s-1}.$$

(Le pôle en $s = 0$ est annulé par le pôle de $\Gamma(s/2)$, donnant $\zeta(0) = -1/2$.)

L'une des conséquences importantes de la formule ci-dessus de prolongement analytique est qu'elle ne change pas sous la substitution $s \rightarrow 1-s$. Par conséquent, pour toutes les valeurs de s ,

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

ou

$$\zeta(s) = \phi(s) \zeta(1-s)$$

où

$$\phi(s) = \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(s/2)}. \quad (39)$$

Par les formules standard (voir par exemple [32], Vol. 1, 1.2.5, 1.2.15)

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad \Gamma(2x) = 2^{2x-1} \pi^{-1/2} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

la dernière expression peut être transformée en (38), ce qui démontre l'équation fonctionnelle (37).

De l'équation fonctionnelle (37), il résulte que $\zeta(s)$ a des zéros "triviaux" aux entiers pairs négatifs (sauf zéro) $s = -2, -4, \dots$ qui proviennent de $\sin(\pi s/2)$ dans (38). Tous les autres zéros non triviaux, $\zeta(s_n) = 0$, sont situés dans la soi-disant bande critique $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Si l'on note ces zéros $s_n = 1/2 + i\gamma_n$, alors l'équation fonctionnelle, jointe au fait que $\zeta(s)^* = \zeta(s^*)$, indique qu'en général il existe 4 ensembles de zéros : $\gamma_n, \gamma_n^*, \gamma_n^*, \gamma_n^*$.

Selon la célèbre conjecture de Riemann (voir par exemple [55]), tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ se trouvent sur la ligne de symétrie $\operatorname{Re} s = 1/2$, ou les γ_n sont tous des quantités réelles. Les calculs numériques confirment cette conjecture pour un nombre exceptionnellement grand de zéros (voir par exemple [47] et le site web d'Odlyzko [48]), mais une démonstration mathématique fait toujours défaut.

5.2. Formule de trace pour les zéros de Riemann

Fixons une fonction test $h(r)$ exactement comme cela a été fait pour la formule de trace de Selberg dans la sect. 2.8, c'est-à-dire

- $h(r)$ est une fonction analytique dans la région $|\operatorname{Im} r| \leq 1/2 + \delta$,
- $h(-r) = h(r)$,
- $|h(r)| \leq A(1 + |r|)^{-2-\delta}$.

Notons comme dans cette section

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) e^{-iru} dr$$

et définissons

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{(s-1/2)u} du.$$

Calculons maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint ds H(s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

où le contour d'intégration est pris sur le rectangle $-\eta \leq \operatorname{Re} s \leq 1 + \eta$ et $-T \leq \operatorname{Im} s \leq T$ avec $0 < \eta < \delta$ et $T \rightarrow +\infty$. À l'intérieur de ce rectangle se trouvent les pôles de $\zeta'(s)/\zeta(s)$ provenant des zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann, $s_n = 1/2 + i\gamma_n$, et celui du pôle de $\zeta(s)$ en $s = 1$. La contribution totale de ces pôles est

$$\sum_n h(\gamma_n) - h\left(-\frac{i}{2}\right).$$

On peut vérifier que la limite $T \rightarrow \infty$ existe et, par conséquent, on a l'identité

$$\sum_n h(\gamma_n) - h\left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\eta-i\infty}^{1+\eta+i\infty} ds H(s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\eta-i\infty}^{-\eta+i\infty} ds H(s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Substituons dans la seconde intégrale l'équation fonctionnelle (37) avec $\phi(s)$ de (39). On a

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \ln \pi - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} - \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1-s}{2} \right) \right].$$

Maintenant toutes les intégrales convergent et on peut déplacer le contour d'intégration jusqu'à $s = 1/2 + ir$ avec r réel. De cette manière, on obtient

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{-\eta-i\infty}^{-\eta+i\infty} ds H(s) \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1-s}{2} \right) \right] = h\left(\frac{i}{2}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}r \right) dr.$$

Le premier terme du membre de droite de cette égalité est dû à l'apparition du pôle de $\Gamma(s/2)$ en $s = 0$ lorsque le contour d'intégration est déplacé jusqu'à $s = 1/2 + ir$. Nous avons aussi utilisé que $h(-r) = h(r)$.

Pour les termes avec la fonction zêta de Riemann, on peut utiliser le développement qui suit de (36)

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_p \ln p \sum_{n=1}^{\infty} p^{-ns}.$$

En déplaçant le contour d'intégration comme ci-dessus (c'est-à-dire jusqu'à $s = 1/2 + ir$), en utilisant que $g(-u) = g(u)$, et en combinant tous les termes ensemble, on obtient la formule explicite de Weil suivante pour les zéros de Riemann

$$\sum_{\substack{\text{zéros non triviaux} \\ \text{de } \zeta}} h(\gamma_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2} r \right) dr + h\left(\frac{i}{2}\right) + h\left(-\frac{i}{2}\right) - g(0) \ln \pi - 2 \sum_{\text{premiers}} \ln p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{n/2}} g(n \ln p).$$

Ici les γ_n sont reliés aux zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann, s_n , par

$$s_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n.$$

Cette formule est un analogue des formules de trace usuelles car elle relie les zéros de la fonction zêta de Riemann, définis de manière assez compliquée, aux nombres premiers qui sont une notion commune.

La similitude avec les formules de trace dynamiques est plus frappante si l'on suppose la validité de la conjecture de Riemann qui stipule que les γ_n sont des quantités réelles (ce qui, dans un certain sens, peut être considéré comme des niveaux d'énergie d'un système quantique). Dans la limite "semi-classique" $r \rightarrow \infty$, en utilisant la formule de Stirling (voir par exemple [32], Vol. 1, 1.9.4)

$$\ln \Gamma(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \left(z - \frac{1}{2} \right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi$$

on obtient que la densité des zéros de Riemann

$$d(E) = \sum_n \delta(E - \gamma_n)$$

peut être exprimée par la formule de trace "physique" suivante, valable pour E grand

$$d(E) = \bar{d}(E) + d^{(osc)}(E)$$

où

$$\bar{d}(E) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{E}{2\pi} + \text{corrections},$$

et

$$d^{(osc)}(E) = -\frac{1}{\pi} \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln p}{p^{n/2}} \cos(E n \ln p)$$

où la sommation est effectuée sur tous les nombres premiers.

5.3. Systèmes chaotiques et fonction zêta de Riemann

En comparant les équations ci-dessus avec les formules de trace des systèmes chaotiques, on observe (voir par exemple [38], [12], [13]) une correspondance remarquable entre différentes quantités dans ces formules de trace

orbites périodiques des systèmes chaotiques $\longleftrightarrow$ nombres premiers,

période d'orbite périodique $T_p \longleftrightarrow \ln p$

les propriétés de convergence des deux formules sont également tout à fait similaires.

Le nombre d'orbites périodiques de période inférieure à T pour les systèmes chaotiques est asymptotiquement

$$N(T_p < T) = \frac{e^{hT}}{hT},$$

où la constante h est appelée entropie topologique.

Le nombre de nombres premiers inférieurs à x est donné par le théorème des nombres premiers (voir par exemple [55])

$$N(p < x) = \frac{x}{\ln x}.$$

Comme $\ln p \equiv T_p$, cette expression a une forme similaire au nombre d'orbites périodiques des systèmes chaotiques avec $h = 1$

$$N(T_p < T) = \frac{e^T}{T}.$$

En raison de ces similitudes, les fonctions zêta de la théorie des nombres jouent le rôle de modèles simples (mais non triviaux) du chaos quantique.

Notons que les signes globaux de la partie oscillante des formules de trace pour la fonction zêta de Riemann et les systèmes dynamiques sont différents. Selon Connes [30], cela peut être interprété comme le fait que les zéros de Riemann n'appartiennent pas au spectre d'un certain opérateur auto-adjoint mais à un spectre "d'absorption". En gros, cela signifie ce qui suit. Supposons que le spectre d'un "hamiltonien de Riemann" soit continu et couvre tout l'axe. Mais exactement lorsque les valeurs propres sont égales aux zéros de Riemann, les fonctions propres correspondantes de ce hamiltonien s'annulent. Par conséquent, ces valeurs propres n'appartiennent pas au spectre et les zéros de Riemann correspondent à de tels points manquants, de manière similaire aux lignes noires (formant des spectres d'absorption) qui sont visibles lorsque la lumière traverse un milieu absorbant. Dans l'approche de Connes, le "hamiltonien de Riemann" peut être très simple (voir aussi [15]) mais l'espace fonctionnel où il doit être défini est extrêmement complexe.

6. Résumé

Des formules de trace peuvent être construites pour tous les systèmes "raisonnables". Elles expriment la densité quantique d'états (et d'autres quantités également) comme une somme sur les

orbites périodiques classiques. Toutes les quantités qui entrent dans les formules de trace peuvent être calculées en mécanique classique pure.

Les formules de trace se composent de deux termes

$$d(E) = \bar{d}(E) + d^{(osc)}(E).$$

La partie lisse de la densité, $\bar{d}(E)$, pour tous les systèmes dynamiques est donnée par la formule de Thomas–Fermi (plus des corrections si nécessaire)

$$\bar{d}(E) = \int \frac{d\mathbf{p}d\mathbf{x}}{(2\pi\hbar)^f} \delta(E - H(\mathbf{p}, \mathbf{x})).$$

Pour les systèmes intégrables, la partie oscillante de la densité, $d^{(osc)}(E)$, est

$$d^{(osc)}(E) = \sum_{\mathbf{N}} \left(\frac{2\pi}{\hbar T_p} \right)^{(f-3)/2} \frac{1}{\hbar^2 \sqrt{|(N_i Q_{ij} N_j)|}} \exp \left(i \frac{S_p}{\hbar} - i \frac{\pi}{4} \mathbf{N} \mu + i \frac{\pi}{4} \beta \right)$$

où $S_p = 2\pi \mathbf{N} \mathbf{I}$ est l'action sur une orbite périodique classique avec des nombres d'enroulement fixés $\mathbf{N}$ et Q_{ij} est la co-matrice de la matrice des dérivées secondes du hamiltonien.

Pour les systèmes chaotiques, $d^{(osc)}(E)$ est représentée comme une somme sur toutes les orbites périodiques classiques

$$d^{(osc)}(E) = \sum_{\text{p.p.o.}} \frac{T_p}{\pi \hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\det(M_p^n - 1)|^{1/2}} \cos \left(n \frac{S_p}{\hbar} - n \frac{\pi}{2} \mu_p \right)$$

où S_p est l'action classique le long d'une trajectoire périodique primitive et M_p est sa matrice de monodromie.

Habituellement, les formules de trace représentent la contribution dominante lorsque $\hbar \rightarrow 0$. Elles ne sont exactes que dans des cas très spéciaux, comme pour les surfaces à courbure négative constante engendrées par des groupes discrets, où elles coïncident avec la formule de trace de Selberg. Pour un groupe ne contenant que des éléments hyperboliques

$$\bar{d}(E) = \frac{\mu(D)}{4\pi} \tanh \pi k$$

où $\mu(D)$ est l'aire du domaine fondamental du groupe et

$$d^{(osc)}(E) = \sum_{\text{p.p.o.}} \frac{l_p}{4\pi k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(k n l_p)}{\sinh(n l_p / 2)}$$

où les l_p sont les longueurs des orbites périodiques.

Les formules similaires aux formules de trace existent aussi pour les fonctions zêta de la théorie des nombres (en supposant la conjecture de Riemann généralisée). En particulier, pour la fonction zêta de Riemann

$$\bar{d}(E) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{E}{2\pi}$$

et

$$d^{(osc)}(E) = -\frac{1}{\pi} \sum_{\text{premiers}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln p}{p^{n/2}} \cos(En \ln p).$$

La difficulté principale de toutes les formules de trace est la divergence des sommes sur les orbites périodiques. Pour obtenir une formule mathématiquement significative, on considère à la place de la densité singulière d'états sa version lissée, définie comme une somme sur toutes les valeurs propres d'une fonction test lisse convenablement choisie. Lorsque ses harmoniques de Fourier décroissent rapidement, la formule résultante représente un objet bien défini.

Suggestions de lectures complémentaires

- Un exposé très détaillé des formules de trace dérivées par la méthode de diffusion multiple se trouve dans une série d'articles de Balian et Bloch [8].
- Une revue mathématique concise de la géométrie hyperbolique est donnée dans [42].
- Les formes explicites de la formule de trace de Selberg pour des groupes discrets généraux avec éléments elliptiques et paraboliques sont présentées dans les deux volumes de l'œuvre monumentale de Hejhal [39], qui contient pratiquement toutes les informations connues sur la formule de trace de Selberg.
- Dans [38], on peut trouver une discussion mathématique sur les différentes relations entre les fonctions zêta de la théorie des nombres et les systèmes dynamiques.

[...]

Opérateurs de Hecke (pages 94–98)

Les groupes arithmétiques possèdent de nombreuses propriétés intéressantes. En particulier, pour tous les groupes arithmétiques, il est possible de construire un nombre infini d'opérateurs commutant mutuellement et commutant également avec l'opérateur de Laplace–Beltrami. Ces opérateurs sont d'origine purement arithmétique et sont appelés opérateurs de Hecke [37], [54].

Dans un certain sens, ces opérateurs permettent de “comprendre” pourquoi les systèmes arithmétiques ont la statistique de Poisson typique uniquement des systèmes intégrables. Le point est que les systèmes intégrables sont des systèmes avec un nombre suffisamment grand d'opérateurs commutants indépendants, et les opérateurs de Hecke peuvent être considérés comme une manifestation d'une sorte d'intégrabilité arithmétique des systèmes arithmétiques qui rend la statistique de Poisson naturelle pour ces modèles [27]. Malheureusement, des relations précises dans cette direction semblent impossibles.

Considérons de manière informelle la construction des opérateurs de Hecke pour le groupe modulaire. Choisissons deux matrices A et B du groupe modulaire ayant la même trace. Comme elles ont la même trace et le même déterminant, elles ont les mêmes valeurs propres et il existe une matrice γ telle que

$$\gamma A \gamma^{-1} = B \quad \text{ou} \quad \gamma A = B \gamma \quad \text{et} \quad \det(\gamma) \neq 0. \quad (85)$$

Si A et B ne sont pas conjuguées dans le groupe modulaire, $\gamma \notin \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Mais la matrice γ peut être choisie comme une matrice à éléments entiers mais de déterminant $\neq 1$.

Exemple.

Considérons les matrices simples suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La forme générale des matrices γ qui obéissent à (85) est

$$\gamma = \begin{pmatrix} 2\alpha + 2\beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

avec α et β arbitraires.

Il est clair qu'il n'existe aucun $\gamma \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, mais en choisissant différentes valeurs entières de α et β , on peut construire un nombre infini de matrices entières de déterminant $\neq 1$ qui obéissent à (85). Par exemple, ces considérations démontrent que lorsqu'on traite le groupe modulaire, il est tout à fait naturel de considérer des matrices à éléments entiers mais de déterminant différent de un.

Les matrices M_p avec $p \neq 1$ ne forment pas un groupe car leur produit n'a pas la même forme.

Une matrice $m_p \in M_p$ peut être représentée de manière unique sous la forme

$$m_p = \mu \alpha_p \quad (86)$$

où $\mu \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et α_p est l'une des matrices de l'ensemble fini suivant

$$\alpha_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \left| a, b, d \text{ entiers, } ad = p, d > 0, 0 \leq b \leq d - 1 \right. \right\}. \quad (87)$$

Au lieu de démontrer ce fait, transformons une matrice simple vers la forme (86). La démonstration générale (voir par exemple [54]) suit les mêmes étapes. D'abord, il est nécessaire de trouver une matrice telle que (i) $\det \mu' = 1$ et (ii).

La condition d'annulation de l'élément inférieur gauche donne l'équation $4\mu_3 + \mu_4 = 0$, et comme μ_4 et μ_3 sont premiers entre eux, ils peuvent être choisis comme suit : $\mu_4 = 4$ et $\mu_3 = -1$. La condition de déterminant unité donne $\mu_1 = k$ et $\mu_2 = 1 - 4k$ avec un entier k arbitraire. Finalement, $b = 1 - 3k$ et le plus petit b positif modulo 3 correspond à $k = 0$. Par conséquent, notre matrice m_3 a la représentation suivante...

Une propriété importante de l'ensemble M_p est que lorsqu'on multiplie une matrice de cet ensemble par une matrice du groupe modulaire, la matrice résultante appartient aussi à M_p

$$M_p g = M_p \quad \text{pour tout } g \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}).$$

Soit $\Psi(z)$ une fonction automorphe du groupe modulaire, c'est-à-dire

$$\Psi(gz) = \Psi(z), \quad \text{pour tout } g \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}).$$

Alors il est facile de voir que la fonction

$$\Psi'(z) \equiv (T_p \Psi)(z) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{a,b,d} \Psi\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

où la sommation est effectuée sur tous les $ad = p$, $d > 0$, $0 \leq b \leq d-1$, sera aussi une fonction automorphe pour le groupe modulaire. C'est une conséquence du fait que dans le membre de droite de cette expression, il y a effectivement la sommation sur toutes les matrices de M_p . Comme M_p ne change pas après multiplication par une matrice du groupe modulaire, $\Psi'(z)$ est une fonction automorphe pour le groupe modulaire. $(T_p \Psi)(z)$ est une sorte de symétrisation de $\Psi(z)$ sur les images de z par tous les éléments de M_p , et les opérateurs T_p sont appelés opérateurs de Hecke.

Ces opérateurs forment une algèbre commutative avec le produit suivant (voir par exemple [54])

$$T_n T_m = \sum_{d|(n,m)} T_{nm/d^2} \quad (88)$$

où la sommation est faite sur tous les diviseurs du plus grand commun diviseur de m et n . Le cas le plus important correspond aux opérateurs de Hecke d'indices premiers car tous les autres peuvent être obtenus à partir de (88).

Lorsque p est un nombre premier,

$$(T_p \Psi)(z) = \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\Psi(pz) + \sum_{0 \leq j < p} \Psi\left(\frac{z+j}{p}\right) \right].$$

Puisque les opérateurs de Hecke n'impliquent que des transformations fractionnaires, tous commutent avec l'opérateur de Laplace–Beltrami. Par conséquent, si $\Psi(x, y)$ est une fonction propre de l'opérateur de Laplace–Beltrami, alors $(T_p \Psi)(x, y)$ sera aussi une fonction propre avec la même valeur propre. S'il n'y a pas de dégénérescence spectrale (ce qui est fortement suggéré par les résultats numériques), chaque fonction propre de l'opérateur de Laplace–Beltrami est en même temps une fonction propre de tous les opérateurs de Hecke

$$(T_p \Psi_n)(x, y) = \lambda_p(n) \Psi_n(x, y). \quad (89)$$

On sait (voir par exemple [54]) que les fonctions propres de l'opérateur de Laplace–Beltrami pour le groupe modulaire ont le développement de Fourier suivant

$$\Psi_n(x, y) = y^{1/2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(n) K_{s_n-1/2}(2\pi p y) e^{2\pi i p x}$$

où la valeur propre de l'opérateur de Laplace–Beltrami est $E_n = s_n(s_n - 1)$ et $K_\nu(x)$ est la fonction de Hankel.

On a $z = x + iy$ et $(az + b)/d = (ax + b)/d + iay/d$, donc

$$(T_m \Psi_n)(x, y) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{a,b,d} \left(\frac{ay}{d}\right)^{1/2} \sum_p c_p(n) K_{s_n-1/2} \left(2\pi p \frac{ay}{d}\right) e^{2\pi i p(ax+b)/d}$$

où la première sommation est effectuée sur tous les a, b, d comme en (87).

La sommation sur b donne zéro si d ne divise pas p . Sinon,

$$(T_m \Psi_n)(x, y) = y^{1/2} \sum_{d|p, d|m} c_p(n) K_{s_n-1/2}(2\pi y p m / d^2) e^{2\pi i p m x / d^2}.$$

Soit $k = m/d$ et $u = p m / d^2$. Alors $p = m u / k^2$ et

$$(T_m \Psi_n)(x, y) = y^{1/2} \sum_u \sum_{k|(m,u)} c_{mu/k^2}(n) K_{s_n-1/2}(2u y) e^{2\pi i u x}.$$

Si $T_m \Psi_n = \lambda_m(n) \Psi_n$, alors en comparant le premier coefficient de Fourier, on obtient

$$c_m(n) = \lambda_m(n) c_1.$$

En supposant $c_1 \neq 0$ et en utilisant une normalisation commode $c_1 = 1$, on conclut que les valeurs propres des opérateurs de Hecke coïncident avec les coefficients de Fourier.

Nous notons aussi que, de manière similaire à la construction de la formule de trace de Selberg, on peut construire les formules de trace pour les opérateurs de Hecke (voir par exemple [24] et les références citées). Une telle formule de trace a schématiquement la forme (cf. (29))

$$\sum_n \lambda_p(n) h(k_n) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\text{hyperbolique}} \frac{l_p}{2 \sinh(L_p/2)} g(L_p) + \text{termes lisses, paraboliques et elliptiques}.$$

Ici $h(k)$ est une fonction test comme dans la sect. 2.8 et $g(l)$ est sa transformée de Fourier. Dans le membre de gauche, la sommation est effectuée sur toutes les valeurs propres $E_n = k_n^2 + 1/4$ de l'opérateur de Laplace–Beltrami et $\lambda_p(n)$ est la valeur propre de l'opérateur de Hecke T_p (89) appliqué à la fonction propre de l'opérateur de Laplace–Beltrami de valeur propre E_n . Dans le membre de droite, la sommation est faite sur toutes les matrices “hyperboliques” de M_p avec $\text{Tr } m_p \neq p + 1$. L_p est la “longueur” associée à la matrice m_p

$$2 \cosh(L_p/2) = |\text{Tr } m_p| / \sqrt{p}$$

et l_p est la longueur minimale des matrices du groupe modulaire commutant avec m_p .