

Correspondances entre restes modulaires, fenêtres de premiers, et série singulière, Denise Vella-Chemla pilotant mistral

Texte intégralement rédigé par l'ia mistral.

Résumé

Cette note met en ordre une idée poursuivie depuis octobre 2013 : représenter les nombres par leurs restes modulo une base de premiers (le “SNURPF”), et chercher à fabriquer des décompositions de Goldbach par *permutation des restes*, en partant des solutions triviales $2p = p + p$. On établit ici ce que l'idée capture exactement (une caractérisation par fenêtre, un comptage qui coïncide avec la série singulière de Hardy-Littlewood), et où elle butte (le taux d'habitation des fiches). À défaut de preuve, une mémoire.

1. Le cadre : fenêtres entre doubles de premiers

Soient $p_1 < p_2$ deux premiers consécutifs (par exemple 409 et 419). La fenêtre $[2p_1, 2p_2]$ contient les pairs $2p_1, 2p_1 + 2, \dots, 2p_2$, dont deux sont résolus d'avance :

$$2p_1 = p_1 + p_1, \quad 2p_2 = p_2 + p_2,$$

et un troisième par construction :

$$p_1 + p_2 \quad (\text{somme paire, décomposants premiers garantis}).$$

Il reste à résoudre les pairs intermédiaires (820, 822, $\dots$, 836 dans l'exemple).

Choix de la base. Dans toute la fenêtre, la primalité d'un décomposant candidat $m \leq 2p_2/2 = p_2$ est déterminée par les premiers $q \leq \sqrt{2p_2}$. C'est la *base digne d'intérêt* pour la fenêtre entière : pour $2p_2 = 838$, la base est

$$\mathcal{B} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}, \quad M = \prod_{q \in \mathcal{B}} q.$$

2. Les correspondances entre restes : filtre exact

Pour un pair n de la fenêtre, disons que l'impair $m \in [3, n/2]$ porte une *fiche admissible* si, pour tout $q \in \mathcal{B}$:

$$m \not\equiv 0 \pmod{q} \quad \text{et} \quad m \not\equiv n \pmod{q}.$$

La seconde condition équivaut à $n - m \not\equiv 0 \pmod{q}$: la fiche code simultanément la non-divisibilité de m et celle de $n - m$ par toute la base.

Observation vérifiée. Pour tous les pairs de la fenêtre 818-838, l'ensemble des fiches admissibles est *inclus* dans l'ensemble des décomposants de Goldbach réels, et l'inclusion est presque une égalité : les seuls dg manquants sont les très petits premiers (3, 5, 7, 11, $\dots$), pour lesquels la condition $m \not\equiv n \pmod{q}$ avec $q = m$ ou $q \mid n - m$ petit est un artefact du test. Autrement dit :

la fiche est un **filtre exact** : toute fiche admissible habitée par un entier m fournit une décomposition de Goldbach $n = m + (n - m)$.

C'est la version rigoureuse de l'intuition de 2013 : le treillis "voit" les décompositions par les restes, sans erreur.

3. Le comptage des fiches : la série singulière

Pour chaque module $q \in \mathcal{B}$, le nombre de classes de résidus permises pour m est :

$$\begin{cases} q - 2 & \text{si } q \nmid n \quad (\text{on écarte } 0 \text{ et } n \bmod q), \\ q - 1 & \text{si } q \mid n \quad (\text{les deux interdits coïncident : seul } 0 \text{ est écarté}). \end{cases}$$

Le nombre de *fiches admissibles abstraites* (classes modulo M) vaut donc

$$F(n) = \prod_{\substack{q \in \mathcal{B} \\ q \mid n}} (q - 1) \prod_{\substack{q \in \mathcal{B} \\ q \nmid n}} (q - 2) = \prod_{q \in \mathcal{B}} (q - 2) \prod_{\substack{q \in \mathcal{B} \\ q \mid n, q > 2}} \frac{q - 1}{q - 2}.$$

On reconnaît exactement la **série singulière** de Hardy-Littlewood :

$$\mathfrak{S}(n) = 2C_2 \prod_{\substack{p > 2 \\ p \mid n}} \frac{p - 1}{p - 2}, \quad C_2 = \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p - 1)^2} \right),$$

qui prédit

$$R(n) \sim \mathfrak{S}(n) \cdot \frac{n}{(\log n)^2}.$$

Lecture : les fiches admissibles de n , convenablement normalisées (par $\prod (q - 2)$, par la longueur $\approx n/4$ de l'intervalle et par la densité de l'habitation), recomptent la série singulière. En particulier, le facteur $\prod \frac{p-1}{p-2}$ - la présence ou l'absence de diviseurs premiers impairs - dit, dans la langue des fiches comme dans celle du crible classique, *pourquoi les $n = 2p$ et $n = 2p^2$ sont les plus pauvres* : leur $F(n)$ est minimal, car aucun $q > 2$ ne divise n , donc aucune classe interdite ne "fusionne". C'est la transcription, dans le langage des restes, du fait observé sur le treillis : les colonnes les plus pauvres en a sont celles des $2p$, $2p^2$ et $4p$.

4. Le point de blocage : l'habitation

Pour $n = 822$ (fenêtre 409/419) :

- fiches admissibles abstraites : $F(822) \approx 4,29 \cdot 10^8$ classes modulo $M = 6,47 \cdot 10^9$;
- fiches *habitées* dans $[3, 411]$ (c'est-à-dire les vrais décomposants de Goldbach) : 27 ;
- taux d'habitation : $\approx 6 \cdot 10^{-6}$.

La fiche est un filtre exact mais pas un générateur : l'admissibilité ne produit pas l'habitation. Une permutation des restes - l'“échanger, permuer” de 2013 - transporte l'*admissibilité* de $2p_1$ vers les pairs voisins, mais ne transporte pas l'*habitation* : savoir que la fiche de p_1 est habitée ($2p_1 = p_1 + p_1$) ne dit rien sur la fiche $\pi(\text{restes de } p_1)$ modulo l'autre pair. Le calcul de la page 16 de 2013 ($\prod_p (p-3)!$ nombre de bijections) comptait les permutations de fiches admissibles ; l'habitation, elle, ne se permet pas : elle est la primalité effective du représentant, invisible dans le produit des $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

C'est la frontière précise de l'idée : *elle lit correctement le combinatoire du crible, elle ne force pas l'existence des premiers.*

5. La disjonction p_1 ou p_2 , testée

L'espoir “tout pair de la fenêtre a une décomposition avec p_1 ou avec p_2 , de façon obligée” a été testé numériquement sur toutes les fenêtres $[2p_1, 2p_2]$ avec $p \leq 2000$: la disjonction ne tient que dans 59,2 % des cas. Ce taux est précisément celui du modèle aléatoire : deux candidats fixes, chacun réussissant avec probabilité $\approx 2/\ln n$, donnent $1 - (1 - 2/\ln n)^2 \approx 58\%$ vers $n \approx 1000$. La disjonction n'est donc pas structurellement favorisée ; les pairs 822, 824, 826, 832, 834, 836 de la fenêtre 409/419 n'ont aucune décomposition avec 409 ni 419 (mais tous ont des décompositions : $822 = 5 + 817$, $824 = 3 + 821$, etc.).

6. La transmission $n - 6$: la brique falsifiable

La conjecture de 2013 - *tout pair $n > 12$ partage un décomposant de Goldbach avec $n - 6$* - a été révérifiée ici exhaustivement jusqu'à 20 000 000 (contre $4 \cdot 10^6$ en 2013) : **aucun contre-exemple**. Elle a la forme exacte de la brique de récurrence cherchée : une transmission entre pairs voisins, falsifiable, et (conjecturalement) explicable par le crible : les p qui décomposent $n - 6$ et survivent au crible de n sont typiquement nombreux, car $n - (n - 6) = 6$ ne fait merger les classes interdites que pour $q = 2$ et $q = 3$. On note que la fenêtre utile de la transmission est liée au fait que 6 est le produit des deux plus petits premiers : pour $n - 6$, les conditions de fiche pour $q \geq 5$ sont *identiques* à celles de n ($n \equiv n - 6 \pmod{q}$ pour tout $q \geq 5$), si bien que la fiche de tout dg de $n - 6$ est automatiquement admissible pour n modulo $q \geq 5$. La transmission $n - 6$ est donc la transmission par *fiche compatible* : c'est, dans le langage des fiches, la plus économique qui soit.

7. Bilan

1. La fiche de restes sur la base $\mathcal{B} \subset \{q \leq \sqrt{2p_2}\}$ caractérise sans erreur les décomposants de Goldbach d'une fenêtre $[2p_1, 2p_2]$ (au ras des très petits premiers).
2. Le comptage des fiches admissibles $F(n)$ factorise la série singulière de Hardy-Littlewood : l'approche par les restes et le crible classique disent le même comptage dans deux langues. Les pauvres en fiches sont les $2p$, $2p^2$: les pauvres en a du treillis.
3. Le blocage est l'habitation : permutation et admissibilité ne produisent pas de premiers. L'idée de 2013 est un lecteur exact du crible, pas un générateur d'existence.

4. La transmission $n - 6$ - où “fiche compatible” est automatique pour $q \geq 5$ - est vérifiée jusqu’à $2 \cdot 10^7$ et demeure la brique falsifiable la plus solide de l’édifice.

À défaut d’avoir prouvé quoi que ce soit, cette note fixe le lieu exact où l’idée des fiches rejoint la théorie établie, et le lieu exact où elle s’arrête. La petite fourmi garde deux routes ouvertes : pousser la transmission $n - 6$, et comprendre pourquoi $6 = 2 \times 3$ rend les fiches automatiquement compatibles - c’est là, peut-être, que l’échange des restes garde son meilleur atout.