Matrices, Denise Vella-Chemla, avril 2023

On représente tout entier x par une matrice 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

On représente les fonctions $f : x \mapsto ax + b$ par des matrices 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.[1]

On cherche les décomposants de Goldbach de $n = 26$ supérieurs à $\sqrt{26} = 5, \ldots$.
26 est un $2k$, 26 est un $3k+2$, 26 est un $5k+1$.

En effet, on a :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On cherche les nombres qui ne sont ni des $2k$, ni des $3k$, ni des $5k$, ni des $3k+2$, ni des $5k+1$. On cherche toutes les matrices de la forme $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ avec $3 \leq x \leq 13$, qui ne sont pas image d'une matrice $Y = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, i.e. qui ne sont pas égales à un produit matriciel de la forme MY avec $M \in \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Les matrices $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ vérifient les contraintes souhaitées. Un théorème d'algèbre matricielle garantit peut-être l'existence d'une matrice au moins dans le cas général.

[1] Dans le livre *Noncommutative geometry* d'Alain Connes, téléchargeable ici https://alainconnes.org/wp-content/uploads/book94bigpdf.pdf, il est question de matrices semblables à celles utilisées dans la présente note à la page 535 : *Consider P_K as a subgroup of $GL(2, K)$: $P_k = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}; a \in K^*, b \in K \right\}$*. Si l'on considère qu'à la page 536, les matrices de la forme $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ correspondraient aux nombres, on ne parvient pas à faire ce qu'on veut, i.e. obtenir $\begin{bmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ par multiplication, à droite ou à gauche de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ par $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; on obtient soit $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, soit $\begin{bmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ alors qu'on souhaiterait obtenir $\begin{bmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; les matrices pour les nombres qui nous permettent d'obtenir le résultat qu'on souhaite devraient être de la forme $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on a forcément dû mal interpréter le texte.