

**Explication par Jacques (Chemla) d'éléments pour m'aider à comprendre petit à petit ce dont il est question dans les articles d'Alain Connes autour de zêta, de l'opérateur prolate, de l'Hamiltonien, etc. (posté début décembre 2025<sup>1</sup>)**

## 1 Opérateur sphéroïdal prolate et zêta

### 1.1 L'espace $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$

On se place ici dans l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$  des fonctions paires  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de carré intégrable, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Autrement dit, une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  appartient à l'espace  $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$  si elle vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \in \mathbb{R}, \\ f(-x) &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par exemple, la fonction gaussienne  $g : x \mapsto e^{-x^2}$  appartient à  $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$  : elle est clairement paire, et de carré intégrable puisque

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (e^{-x^2})^2 dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

d'après la formule de l'intégrale de Gauss.

### 1.2 Transformation de Fourier

La transformation de Fourier sur l'espace  $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$  est l'opérateur unitaire défini par

$$\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} f : y \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i xy} dx.$$

La transformation inverse  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}^{-1}$ , qui est aussi l'opérateur adjoint  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}^*$ , est définie par

$$\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}^{-1} f : y \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i xy} dx.$$

### 1.3 Opérateur de parité

Soit  $\mathcal{P}$  l'opérateur de parité

$$\mathcal{P} f : x \rightarrow f(-x).$$

---

1. car oubli de poster début 2025.

L'opérateur  $\mathcal{P}$  commute avec la transformation de Fourier de manière générale, ce qui fournit une définition alternative de la transformation inverse :

$$\mathcal{P} \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} = \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} \mathcal{P} = \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}^{-1}.$$

En particulier, dans l'espace  $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ , toute fonction  $f$  est paire, donc invariante par  $\mathcal{P}$  :

$$\mathcal{P}f = f.$$

Par conséquent,  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} \mathcal{P} = \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ , ce qui entraîne que  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$  est un opérateur autoadjoint :

$$\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} = \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}^* = \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}^{-1}.$$

## 1.4 Transformée de $1_{[-\lambda, \lambda]}$

Soit  $1_{[-\lambda, \lambda]}$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $[-\lambda, \lambda]$  (aussi appelée fonction porte  $\Pi_{2\lambda}$ ). On a alors

$$\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} 1_{[-\lambda, \lambda]} : y \rightarrow \lambda \operatorname{sinc}(2\pi\lambda y),$$

où  $\operatorname{sinc}$  désigne le sinus cardinal.

En effet,

$$\begin{aligned} (\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} 1_{[-\lambda, \lambda]})(y) &= \int_{\mathbb{R}} 1_{[-\lambda, \lambda]}(x) e^{-2\pi i xy} dx = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-2\pi i xy} dx \\ &= \left[ \frac{e^{-2\pi i xy}}{-2\pi iy} \right]_{x=-\lambda}^{x=\lambda} = \frac{1}{\pi y} \left( \frac{e^{2\pi i \lambda y} - e^{-2\pi i \lambda y}}{2i} \right) = \frac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y} \quad \text{si } y \neq 0, \\ &= \int_{-\lambda}^{\lambda} dx = 2\lambda \quad \text{si } y = 0. \end{aligned}$$

Autre démonstration (A. Connes, p. 5, où  $\delta_\lambda$  désigne la fonction décentrée de Dirac) :

$$\begin{aligned} \partial_x 1_{[-\lambda, \lambda]} &= \delta_{-\lambda} - \delta_\lambda \implies \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(\partial_x 1_{[-\lambda, \lambda]}) = \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} \delta_{-\lambda} - \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} \delta_\lambda \\ &\implies 2\pi i y (\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} 1_{[-\lambda, \lambda]}) = e^{2\pi i \lambda y} - e^{-2\pi i \lambda y} \\ &\implies (\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} 1_{[-\lambda, \lambda]})(y) = \frac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y} \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de  $1_{[-\lambda, \lambda]}$  est illustrée ci-dessous, dans le cas  $\lambda = 1$ .

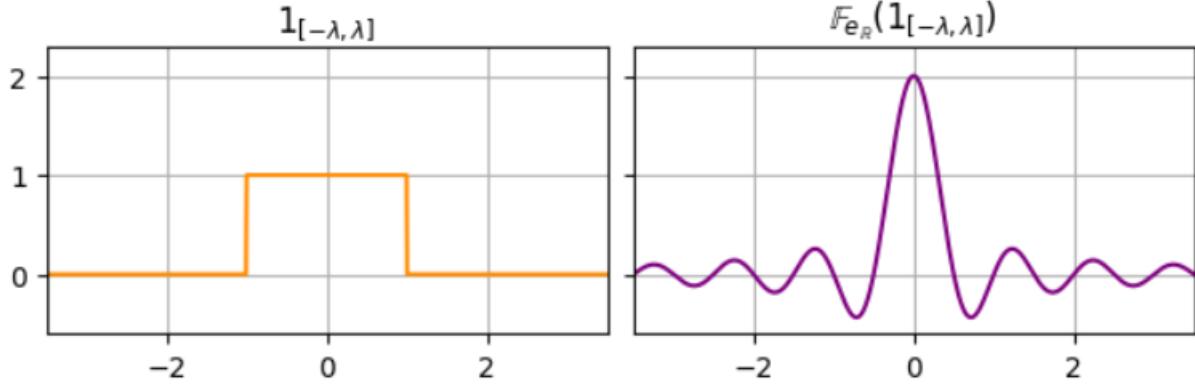


FIG.

1 Transformée de la fonction caractéristique de l'intervalle  $[-\lambda, \lambda]$ .

## 1.5 Opérateur sphéroïdal prolate

## 1.6 Les projections $P_\lambda$ et $\widehat{P}_\lambda$

Les fonctions d'onde sphéroïdale prolate jouent un rôle central dans certaines études en lien avec la fonction zêta de Riemann.

Dans ces applications, elles apparaissent comme les fonctions propres de l'opérateur d'angle entre deux projections orthogonales de  $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$  dépendant d'un paramètre réel  $\lambda > 0$  :

- $P_\lambda$  est la projection de coupure (cutoff) associée à l'intervalle  $[-\lambda, \lambda]$ , c'est-à-dire l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique  $1_{[-\lambda, \lambda]}$  :

$$P_\lambda f := f \times 1_{[-\lambda, \lambda]} : x \rightarrow \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leq \lambda, \\ 0 & \text{si } |x| > \lambda. \end{cases}$$

- $\widehat{P}_\lambda$  est son conjugué par la transformation de Fourier  $\mathbb{F}_{e_R}$ , soit

$$\widehat{P}_\lambda := \mathbb{F}_{e_R} P_\lambda \mathbb{F}_{e_R}^{-1}.$$

Par exemple, la projection de la fonction gaussienne  $P_\lambda e^{-x^2}$  est illustrée ci-dessous, dans le cas  $\lambda = 1$ .

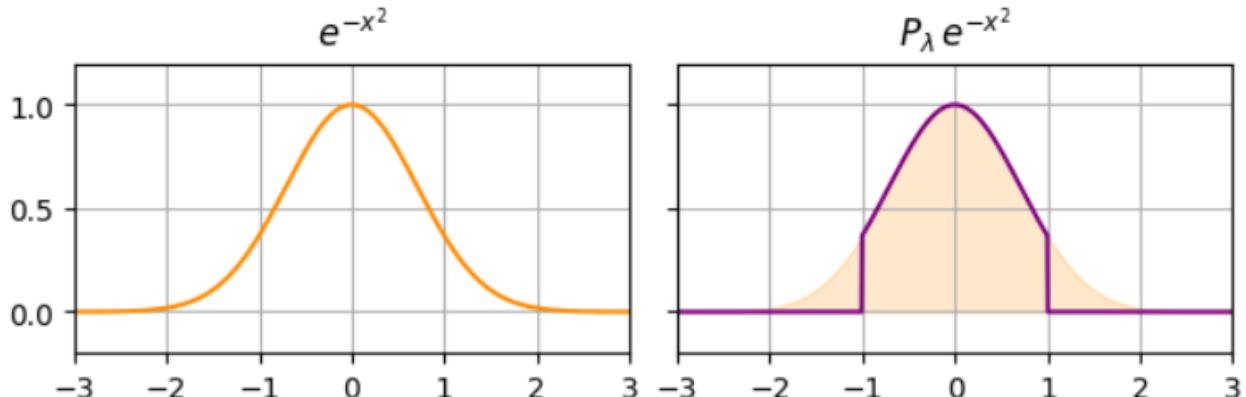


FIG. 2 : Projection d'une courbe de Gauss

## 1.7 L'opérateur $W_\lambda f$

L'opérateur sphéroïdal prolate est l' opérateur différentiel du second degré

$$(W_\lambda f)(x) = -\partial_x ((\lambda^2 - x^2)\partial_x f(x)) + (2\pi\lambda)^2 x^2 f(x).$$

Il s'agit d'un opérateur de type Sturm-Liouville

$$(W_\lambda f)(x) = -\partial_x (p(x)\partial_x f(x)) + q(x)f(x),$$

avec  $p(x) = \lambda^2 - x^2$  et  $q(x) = (2\pi\lambda)^2 x^2$ . Cet opérateur ayant deux points singuliers internes n'est pas directement traitable par la théorie habituelle de Sturm-Liouville, mais ses restrictions sur chacun des intervalles  $(-\infty, -\lambda)$ ,  $(-\lambda, \lambda)$  et  $(\lambda, \infty)$  le sont.

L'opérateur  $W_\lambda$  possède certaines propriétés remarquables :

- $W_\lambda$  est réel, symétrique, invariant par changement de parité  $x \mapsto -x$  ;
- $W_\lambda$  commute avec la transformation de Fourier  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$  et avec la projection  $P_\lambda$  ;
- par conséquent,  $W_\lambda$  commute également avec  $\widehat{P}_\lambda$  et l'opérateur d'angle.

## 1.8 Symbole de l'opérateur $W_\lambda$

Le symbole de l'opérateur différentiel  $W_\lambda$  est le polynôme  $\mathbf{W}_\lambda$  obtenu en remplaçant chaque dérivée partielle par une variable  $y$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\lambda(x, y) &= -y((\lambda^2 - x^2)y) + (2\pi\lambda)^2 x^2 \\ &= (x^2 - \lambda^2)y^2 + (2\pi\lambda)^2 x^2 \\ &= (x^2 - \lambda^2)(y^2 - \lambda^2) + (x^2 - \lambda^2)\lambda^2 + (2\pi\lambda)^2 x^2 \end{aligned}$$

On montre (?) que

$$\mathbf{W}_\lambda = -4\pi^2 H_\lambda + 4\pi^2 \lambda^4.$$

## 1.9 Champ de vecteurs hamiltonien

On note  $H_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction réelle différentiable (hamiltonien) définie par

$$H_\lambda(x, y) = (x^2 - \lambda^2)(y^2 - \lambda^2).$$

Cette fonction s'annule sur les 4 droites d'équations  $x = \pm\lambda$ ,  $y = \pm\lambda$ .

Le champ de vecteurs hamiltonien  $X_{H_\lambda}$  associé à  $H_\lambda$  prend la forme

$$X_{H_\lambda} = \Omega \, dH_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x H_\lambda \\ \partial_y H_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y H_\lambda \\ -\partial_x H_\lambda \end{bmatrix}.$$

Ce champ de vecteurs est une fonction vectorielle  $X_{H_\lambda} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  associant à tout point  $p = (x, y)$  le vecteur

$$X_{H_\lambda}(x, y) = \begin{bmatrix} 2y(x^2 - \lambda^2) \\ -2x(y^2 - \lambda^2) \end{bmatrix}.$$

## 1.10 Lignes de champ

Une ligne de champ, ou courbe intégrale, du champ vectoriel  $X_{H_\lambda}$  est une courbe  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  paramétrée par le temps  $t$ ,

- passant par un point  $p \in \mathbb{R}^2$  à l'instant  $t = 0$  ;
- tangente en chacun de ses points au champ vectoriel  $X_{H_\lambda}$ .

La courbe  $\gamma$  est donc solution de l'équation différentielle ordinaire du 1<sup>er</sup> ordre

$$\gamma' = f(t, \gamma), \quad \gamma(0) = p,$$

où  $f(t, \gamma) = X_{H_\lambda}(\gamma(t))$ .

Le long d'une ligne de champ, le hamiltonien  $H_\lambda$  est constant.

En effet, la quantité  $H_\lambda(\gamma(t))$  reste constante lorsque  $t$  varie, puisque sa dérivée est constamment nulle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_\lambda(\gamma(t)) &= [\partial_x H_\lambda \quad \partial_y H_\lambda] \Big|_{\gamma(t)} \gamma'(t) \\ &= [\partial_x H_\lambda \quad \partial_y H_\lambda] \Big|_{\gamma(t)} X_{H_\lambda} \Big|_{\gamma(t)} \\ &= [\partial_x H_\lambda \quad \partial_y H_\lambda] \Big|_{\gamma(t)} \left[ \begin{array}{c} \partial_y H_\lambda \\ -\partial_x H_\lambda \end{array} \right] \Big|_{\gamma(t)} \\ &= [(\partial_x H_\lambda)(\partial_y H_\lambda) - (\partial_y H_\lambda)(\partial_x H_\lambda)] \Big|_{\gamma(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les lignes de champ peuvent donc s'obtenir de deux manières différentes :

- soit comme des courbes de niveaux (ou lignes de contours) du hamiltonien  $H_\lambda$  (calculées par la fonction contour de `matplotlib`) ;
- soit comme des courbes intégrales du champ de vecteurs  $X_{H_\lambda}$  associé à  $H_\lambda$  (calculées par intégration numérique).

## 1.11 Calcul des courbes intégrales

La méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre (RK4) permet de résoudre ce type d'équation différentielle avec une grande précision.

L'erreur totale cumulée est de l'ordre de  $O(h^4)$ , où  $h$  est le pas de discrétisation temporel.

## 1.12 Visualisation

Voir page suivante.

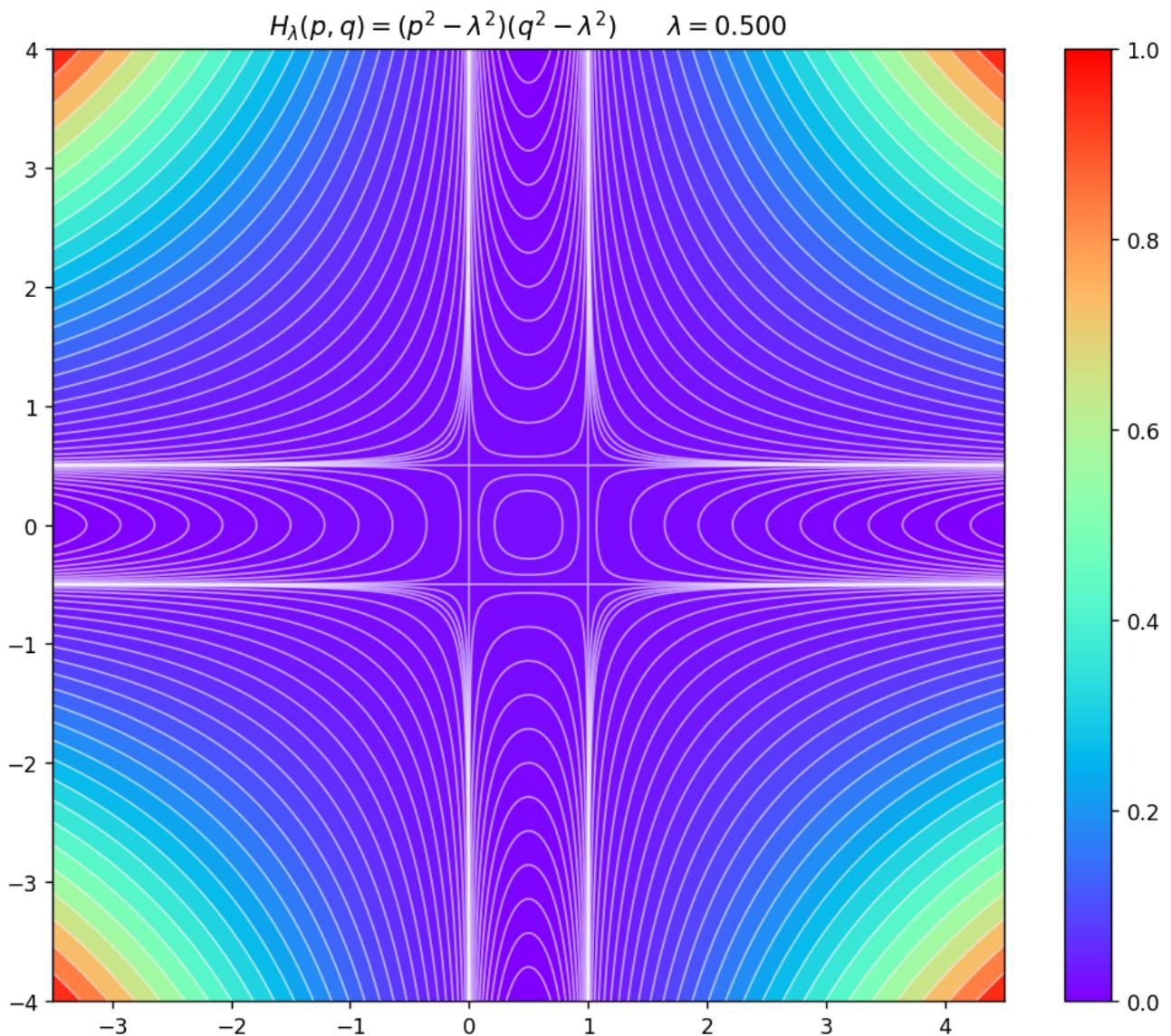


FIG. 3 : le flot des courbes intégrales (ou des courbes de niveaux)