Jumeaux et automates (Denise Vella-Chemla, 12.12.2015)

Il s'agit de démontrer que l'ensemble des nombres premiers jumeaux est infini. On rappelle que deux nombres premiers jumeaux ont pour différence 2. Par exemple, 3 et 5 sont des nombres premiers jumeaux, 41 et 43 en sont également.

On définit deux fonctions $pp(x)$ (pp pour *prec_premier*) et $sp(x)$ (sp pour *succ_premier*) qui associent à un nombre pair x deux booléens de primalité selon que $x-1$ et $x+1$ sont premiers ou non. Par convention, le booléen 0 signifie *premier* et le booléen 1 signifie *composé*.

Par exemple, $pp(8) = 0$ car $8 - 1 = 7$ est premier tandis que $sp(8) = 1$ car $8 + 1 = 9$ est composé.

Les valeurs des fonctions $pp(x)$ et $sp(x)$ sont notées dans le tableau ci-dessous pour x compris entre 2 et 24.

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$pp(x)$	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
$sp(x)$	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1

On note de façon évidente que la séquence des valeurs de la fonction $sp(x)$ est simplement un "décalage" d'un cran de la séquence des valeurs de la fonction $pp(x)$. En effet, $\forall x, sp(x) = pp(x + 2)$.

Notations : On désigne par la lettre :

- a : un entier pair tel que $pp(x) = 0$ et $sp(x) = 0$;
- b : un entier pair tel que $pp(x) = 0$ et $sp(x) = 1$;
- c : un entier pair tel que $pp(x) = 1$ et $sp(x) = 0$;
- d : un entier pair tel que $pp(x) = 1$ et $sp(x) = 1$.

Cette convention de notation permet d'ajouter une ligne au tableau en associant à chaque nombre pair x la lettre $l(x)$ lui correspondant selon les valeurs que prennent pour lui les fonctions $pp(x)$ et $sp(x)$.

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$pp(x)$	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
$sp(x)$	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
$l(x)$	c	a	a	b	c	a	b	c	a	b	c	b

Supposons qu'à partir d'un certain rang, il n'y ait plus de couple de nombres premiers jumeaux (i.e. que le nombre de nombres premiers jumeaux est fini). Alors la séquence de lettres à partir d'un certain rang ne contiendrait plus aucune lettre a. A cause de la condition de décalage, les lettres de la séquence devraient alors se succéder selon les règles suivantes :

- après une lettre b ou une lettre d ne pourraient venir qu'une lettre c ou une lettre d ;
- après une lettre c ne pourrait venir qu'une lettre b ;

On représente ces contraintes sur la séquence de lettres par un automate. Une flèche entre une lettre x et une lettre y de l'automate exprime la condition "x peut être suivie par y dans la séquence globale des lettres". On n'arrive cependant pas à aboutir à une contradiction en partant de l'hypothèse que la séquence globale de lettres ne contient plus de lettre a à partir d'un certain rang.