

Formalisation dynamique du treillis de Goldbach et flot de Kronecker

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia gemini, 27 juillet 2026

Cette note formalise l'intuition géométrique et dynamique reliant le treillis matriciel des décompositions de Goldbach, la propriété d'ergodicité du flot de Kronecker sur le tore, et la question de la présence obligatoire d'une décomposition pour chaque entier.

1. 1. Traduction formelle du cadre dynamique (Le tore et la pente)

- **l'espace des phases (tore tronqué)** : Soit $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le tore de dimension 2. Le treillis matriciel représenté dans le plan discret modélise une restriction ou un domaine fondamental d'un tel espace après relèvement.
- **le système dynamique (Translation de Kronecker)** : Considérons l'application de translation sur le tore définie par un vecteur dont la direction est dictée par la pente α . Dans le modèle géométrique issu du treillis, la pente apparente est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ou $\tan(\pi/4)$ selon la paramétrisation des axes).
- puisque cette pente est irrationnelle, les orbites de cette translation sont **strictement équi-distribuées et denses** dans le tore, conformément au *théorème d'équidistribution de Weyl*.

2. 2. Lien avec les fonctions caractéristiques des nombres premiers

Soit $\chi_{\mathbb{P}}$ la fonction caractéristique de l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$:

$$\chi_{\mathbb{P}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{P} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les blocs ou lettres caractéristiques (a, b, c, d) encodent les produits cartésiens de ces fonctions indicatrices de primalité (par exemple, la conjonction $\chi_{\mathbb{P}}(p_1) \cdot \chi_{\mathbb{P}}(p_2)$). Le remplissage par les 16 règles équivaut à un automate cellulaire ou à une convolution discrète de ces fonctions caractéristiques sur le réseau triangulaire.

3. 3. Expression rigoureuse de la question sur Goldbach

La présence d'une décomposition de Goldbach pour chaque entier pair n se traduit par la non-vacuité de l'intersection entre le support de la structure combinatoire et chaque droite verticale.

[Interprétation dynamique] Soit $S \subset \mathbb{N}^2$ le support des points noirs (configurations valides a) généré par les règles du treillis. La conjecture de Goldbach équivaut à affirmer que pour toute coupe verticale $\mathcal{V}_n = \{(n, y) \mid y \in \mathbb{N}\}$, l'intersection $S \cap \mathcal{V}_n$ est non vide pour tout $n \geq N_0$.

En plongeant ce système discret dans un système dynamique continu (via une extension du treillis sur $\mathbb{R}^2$), la **densité topologique** de l'orbite découlant de l'irrationalité de la pente (flot de Kronecker) garantit que l'ensemble des points d'accumulation visite tout voisinage ouvert du tore.

4. 4. Limite mathématique et perspectives

Bien que la densité ergodique du flot de Kronecker garantisse une **répartition uniforme à grande échelle** (mettant en lumière des liens profonds avec les approches statistiques de type Hardy-Littlewood ou le théorème de Vinogradov), passer de la densité globale à la **présence systématique sans lacune** pour chaque entier individuel n reste un obstacle arithmétique majeur. En effet, un ensemble dense sur un tore peut théoriquement présenter des fluctuations ou des lacunes à l'échelle discrète, nécessitant un contrôle fin des restes et de la répartition des nombres premiers.