Générer des couples de nombres premiers jumeaux

Denise Vella-Chemla

7/6/2012

1 Introduction

Dans cette note, on étudie la conjecture des nombres premiers jumeaux selon une approche combinatoire. Cette approche, que l'on pourrait qualifier de lexicale, utilise des mots de représentation des entiers par leurs restes modulaires selon les nombres premiers successifs.

2 Énoncé

On appelle *nombres premiers jumeaux* deux nombres premiers dont la différence est 2.
Exemples :

3 et 5 sont des nombres premiers jumeaux.
29 et 31 sont des nombres premiers jumeaux.

La conjecture des nombres premiers jumeaux stipule que l'ensemble des nombres premiers jumeaux est infini.

3 Représentation par les restes

Représentons les premiers entiers naturels par leurs restes modulo les nombres premiers successifs.
On ajoute à chaque *"mot"* de restes le mot n-uplet infini $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ qui représente l'entier naturel 1.

mod	2	3	5	7	11	13	17	19	...
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
2	0	2	2	2	2	2	2	2	...
3	1	0	3	3	3	3	3	3	...
4	0	1	4	4	4	4	4	4	...
5	1	2	0	5	5	5	5	5	...
6	0	0	1	6	6	6	6	6	...
7	1	1	2	0	7	7	7	7	...
8	0	2	3	1	8	8	8	8	...
9	1	0	4	2	9	9	9	9	...
10	0	1	0	3	10	10	10	10	...
11	1	2	1	4	0	11	11	11	...
12	0	0	2	5	1	12	12	12	...
13	1	1	3	6	2	0	13	13	...
14	0	2	4	0	3	1	14	14	...
15	1	0	0	1	4	2	15	15	...
16	0	1	1	2	5	3	16	16	...
17	1	2	2	3	6	4	0	17	...
18	0	0	3	4	7	5	1	18	...
19	1	1	4	5	8	6	2	0	...
20	0	2	0	6	9	7	3	1	...

Observons quelques représentations par les restes qui sont pertinentes par rapport à la conjecture des nombres premiers jumeaux.

6, un nombre pair entre les deux premiers jumeaux 5 et 7 a pour représentation 0 0 1 6 6 6 .... Il a un 1 en troisième position parce que 5 a un 0 à cette position (un nombre premier est congru à 0 modulo lui-même, jamais congru à 0 modulo un nombre premier qui lui est strictement inférieur et congru à lui-même modulo tout nombre premier qui lui est strictement supérieur). 6 a un 6 en quatrième position parce que 7 a un 0 à cette position-là (le reste de 7 modulo lui-même). Les deux premières lettres du mot de représentation du nombre 6 ne sont ni des 1 ni des $p_k - 1$ (ni 1 ni 1 dans la colonne correspondant au nombre premier 2, ni 1 ni 2 dans la colonne correspondant au nombre premier 3) car si tel était le cas, l'un ou l'autre de 5 ou 7 serait composé.

18, entre 17 et 19, a pour représentation 0 0 3 4 7 5 1 18 ... : il n'a ni 1 ni $p_k - 1$ parmi ses six premières lettres, correspondant à ses restes modulo $2, 3, 5, 7, 11$ et 13. Le mot de 18 a un 1 en septième position (correspondant à son reste modulo 17 : $18 = 17 + 1$) et 18 a un reste de 18 en huitième position (correspondant à son reste modulo $19 = 18 + 1$).

4 Générer les couples de nombres premiers jumeaux

On va générer des couples de nombres premiers jumeaux en appliquant le théorème des restes chinois à des systèmes de congruences. On a vu qu'on "refuse" les restes 1 et $p_k - 1$ modulo p_k.

On représentera la résolution du système de congruences suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 0 \ (mod\ 2) \\ x \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ x \equiv 2 \ (mod\ 5) \end{cases}$$

par l'application $0\ 0\ 2 \rightarrow 12$ dans la mesure où 12 est le plus petit entier solution du système de congruences en question.

Au troisième niveau, on trouve les solutions suivantes :

$$\begin{array}{l} 0\ 0\ 0 \rightarrow 0 \\ 0\ 0\ 2 \rightarrow 12 \\ 0\ 0\ 3 \rightarrow 18 \end{array}$$

toutes deux inférieures à $25 = 5^2$, qui fournissent donc deux pairs entre deux premiers jumeaux :
$11 < 12 < 13$ et $17 < 18 < 19$.

Au niveau suivant, on trouve combinatoirement les solutions ci-après :

$0\ 0\ 0\ 0 \rightarrow \cancel{0}$	$0\ 0\ 2\ 0 \rightarrow 42$	$0\ 0\ 3\ 0 \rightarrow \cancel{168}$
$0\ 0\ 0\ 2 \rightarrow 30$	$0\ 0\ 2\ 2 \rightarrow 72$	$0\ 0\ 3\ 2 \rightarrow 198$
$0\ 0\ 0\ 3 \rightarrow 150$	$0\ 0\ 2\ 3 \rightarrow 192$	$0\ 0\ 3\ 3 \rightarrow 108$
$0\ 0\ 0\ 4 \rightarrow 60$	$0\ 0\ 2\ 4 \rightarrow 102$	$0\ 0\ 3\ 4 \rightarrow 18$
$0\ 0\ 0\ 5 \rightarrow 180$	$0\ 0\ 2\ 5 \rightarrow 12$	$0\ 0\ 3\ 5 \rightarrow 138$

dont seules les quatre solutions colorées sont inférieures à $49 = 7^2$. Parmi toutes les autres solutions, seule une, le nombre pair 168 n'est pas juste entre deux nombres premiers jumeaux ($169 = 13^2$), tous les autres pairs étant entre deux nombres premiers jumeaux.

Enfin, détaillons un niveau supplémentaire :

0 0 0 0 0 → $\cancel{0}$	0 0 2 0 0 → 462	0 0 3 0 0 → 1848
0 0 0 0 2 → 420	0 0 2 0 2 → 882	0 0 3 0 2 → 2268
0 0 0 0 3 → 630	0 0 2 0 3 → 1092	0 0 3 0 3 → 168
0 0 0 0 4 → 840	0 0 2 0 4 → 1302	0 0 3 0 4 → 378
0 0 0 0 5 → 1050	0 0 2 0 5 → 1512	0 0 3 0 5 → 588
0 0 0 0 6 → 1260	0 0 2 0 6 → 1722	0 0 3 0 6 → 798
0 0 0 0 7 → 1470	0 0 2 0 7 → 1932	0 0 3 0 7 → 1008
0 0 0 0 8 → 1680	0 0 2 0 8 → 2142	0 0 3 0 8 → 1218
0 0 0 0 9 → 1890	0 0 2 0 9 → 42	0 0 3 0 9 → 1428
0 0 0 2 0 → 660	0 0 2 2 0 → 1122	0 0 3 2 0 → 198 *J*
0 0 0 2 2 → 1080	0 0 2 2 2 → 1542	0 0 3 2 2 → 618 *J*
0 0 0 2 3 → 1290	0 0 2 2 3 → 1752	0 0 3 2 3 → 828 *J*
0 0 0 2 4 → 1500	0 0 2 2 4 → 1962	0 0 3 2 4 → 1038
0 0 0 2 5 → 1710	0 0 2 2 5 → 2172	0 0 3 2 5 → 1248
0 0 0 2 6 → 1920	0 0 2 2 6 → 72 *J*	0 0 3 2 6 → 1458
0 0 0 2 7 → 2130	0 0 2 2 7 → 282 *J*	0 0 3 2 7 → 1668 *J*
0 0 0 2 8 → 30	0 0 2 2 8 → 492	0 0 3 2 8 → 1878 *J*
0 0 0 2 9 → 240	0 0 2 2 9 → 702	0 0 3 2 9 → 2088 *J*
0 0 0 3 0 → 990	0 0 2 3 0 → 1452 *J*	0 0 3 3 0 → 528
0 0 0 3 2 → 1410	0 0 2 3 2 → 1872 *J*	0 0 3 3 2 → 948
0 0 0 3 3 → 1620 *J*	0 0 2 3 3 → 2082 *J*	0 0 3 3 3 → 1158
0 0 0 3 4 → 1830	0 0 2 3 4 → 2292	0 0 3 3 4 → 1368
0 0 0 3 5 → 2040	0 0 2 3 5 → 192 *J*	0 0 3 3 5 → 1578
0 0 0 3 6 → 2250	0 0 2 3 6 → 402	0 0 3 3 6 → 1788 *J*
0 0 0 3 7 → 150 *J*	0 0 2 3 7 → 612	0 0 3 3 7 → 1998 *J*
0 0 0 3 8 → 360	0 0 2 3 8 → 822 *J*	0 0 3 3 8 → 2208
0 0 0 3 9 → 570 *J*	0 0 2 3 9 → 1032 *J*	0 0 3 3 9 → 108 *J*
0 0 0 4 0 → 1320 *J*	0 0 2 4 0 → 1782	0 0 3 4 0 → 858 *J*
0 0 0 4 2 → 1740	0 0 2 4 2 → 2202	0 0 3 4 2 → 1278 *J*
0 0 0 4 3 → 1950 *J*	0 0 2 4 3 → 102 *J*	0 0 3 4 3 → 1488 *J*
0 0 0 4 4 → 2160	0 0 2 4 4 → 312 *J*	0 0 3 4 4 → 1698 *J*
0 0 0 4 5 → 60 *J*	0 0 2 4 5 → 522 *J*	0 0 3 4 5 → 1908
0 0 0 4 6 → 270 *J*	0 0 2 4 6 → 732	0 0 3 4 6 → 2118
0 0 0 4 7 → 480	0 0 2 4 7 → 942	0 0 3 4 7 → 18 *J*
0 0 0 4 8 → 690	0 0 2 4 8 → 1152 *J*	0 0 3 4 8 → 228 *J*
0 0 0 4 9 → 900	0 0 2 4 9 → 1362	0 0 3 4 9 → 438
0 0 0 5 0 → 1650	0 0 2 5 0 → 2112 *J*	0 0 3 5 0 → 1188
0 0 0 5 2 → 2070	0 0 2 5 2 → 222	0 0 3 5 2 → 1608 *J*
0 0 0 5 3 → 2280	0 0 2 5 3 → 432 *J*	0 0 3 5 3 → 1818
0 0 0 5 4 → 180 *J*	0 0 2 5 4 → 642 *J*	0 0 3 5 4 → 2028 *J*
0 0 0 5 5 → 390	0 0 2 5 5 → 852	0 0 3 5 5 → 2238 *J*
0 0 0 5 6 → 600 *J*	0 0 2 5 6 → 1062 *J*	0 0 3 5 6 → 138 *J*
0 0 0 5 7 → 810 *J*	0 0 2 5 7 → 1272	0 0 3 5 7 → 348 *J*
0 0 0 5 8 → 1020 *J*	0 0 2 5 8 → 1482 *J*	0 0 3 5 8 → 558
0 0 0 5 9 → 1230 *J*	0 0 2 5 9 → 1692	0 0 3 5 9 → 768

qui est obtenu en admettant combinatoirement des congruences possibles à $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9 modulo 11. On a coloré les nombres inférieurs à $121 = 11^2$. On a indiqué par un J les nombres qui sont des pairs juste entre deux nombres premiers.

On voit qu'aux niveaux successifs, on obtiendra $(((((3.5).9).11).15).17).21)\ldots$ nombres pour les modules premiers jusqu'à 23 par exemple.

Mais on voit également que les pairs "juste entre deux premiers" peuvent s'hériter d'un niveau à l'autre ou pas (12 a disparu entre les deux derniers niveaux alors que $18, 30$ et 42 ont été conservés). S'il n'y avait aucun pair à un niveau, il n'y aurait aucun pair au niveau inférieur. Et cela pourrait aboutir à une contradiction par descente puisque les pairs d'un niveau s'obtiennent par expansion des mots des pairs des niveaux inférieurs.

Il faudrait aussi être assuré qu'il n'est pas possible qu'il y ait une “stabilisation de la population” qui ferait qu'à partir d'un certain niveau, on n'obtiendrait pas de “nouveau” pair juste entre deux premiers, ce qui pourrait avoir pour conséquence la finitude de l'ensemble des nombres premiers jumeaux.