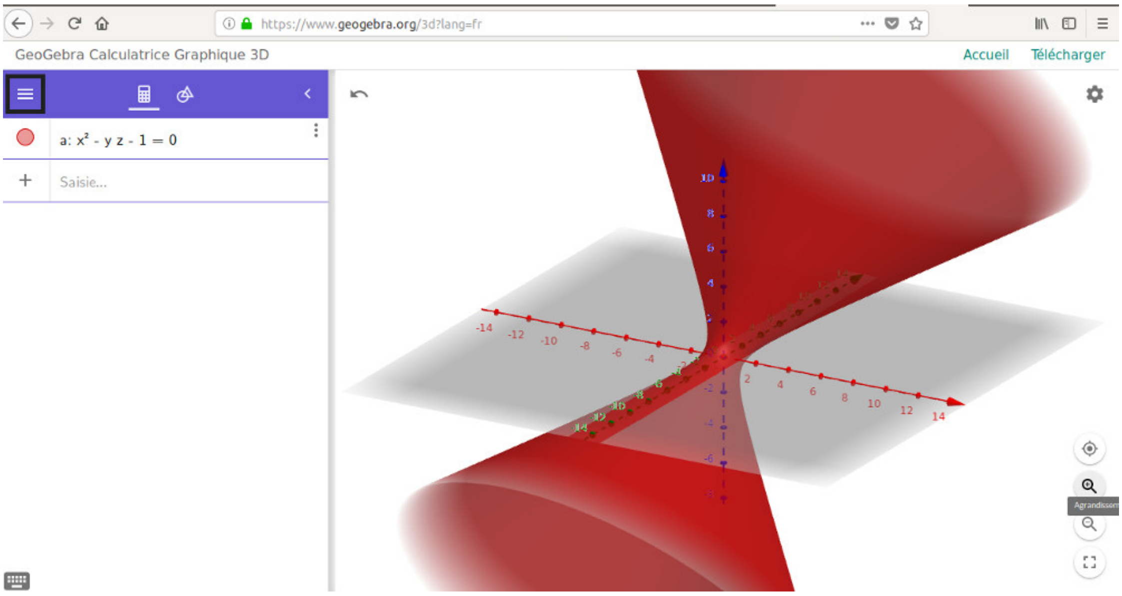
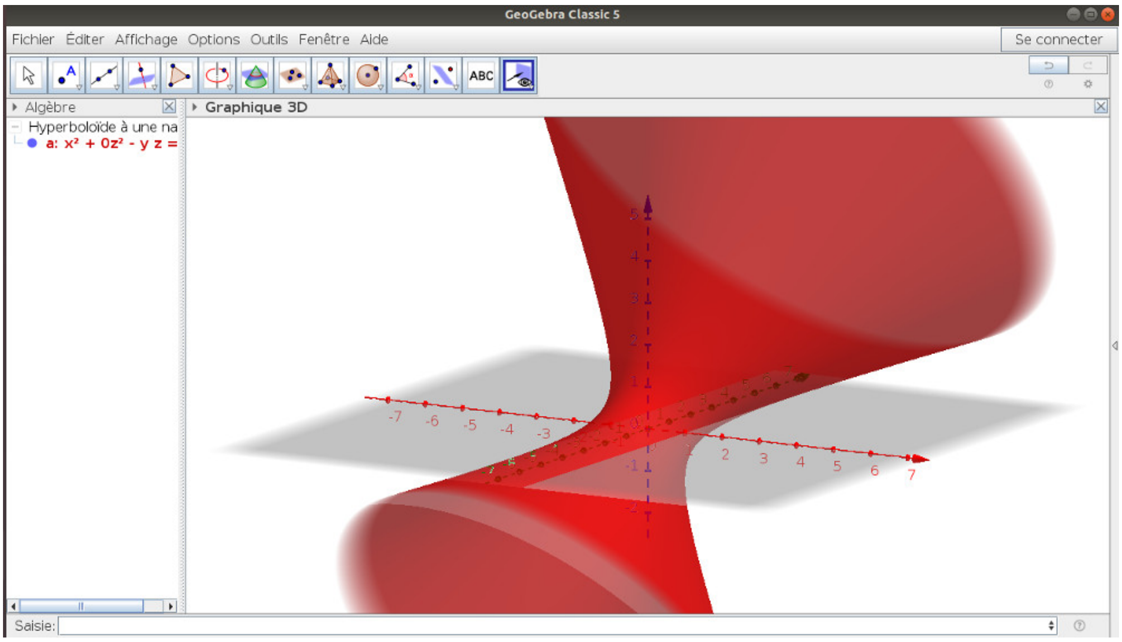
Hyperboloide à une nappe (Denise Vella-Chemla, 18.8.18)

On avait découvert par programme à la recherche initiale des points fixes et de leur nombre dans les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, puis à la recherche des racines carrées de 1 et de leur nombre dans ces anneaux, que 1 a exactement 2 racines carrées seulement dans les corps premiers $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ ou dans les anneaux $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ avec p^k une puissance de nombre premier. Dans les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 1 a 2^k racines carrées avec k le nombre de nombres premiers *impairs* intervenant dans la factorisation de n. On nous a fourni l'explication conceptuelle de ces faits, qui découle de l'isomorphisme d'anneaux entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et le produit des anneaux $\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}$ si $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ (les cas $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ sont inclus dans le cas général).

On souhaiterait comprendre ce qui se passe si on sort de ces sortes de "rouleaux" cycliques que sont les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a fait dessiner à Geogebra-3D la surface d'équation $x^2 - yz - 1 = 0$. Cette surface est un hyperboloide à une nappe (en un seul morceau), ou sorte de sablier infini, qui passe par les points $(1,0,0)$ et $(-1,0,0)$. Il faut imaginer une grille sur cette surface, grille dont les intersections sont les points à coordonnées entières.

Pour l'instant, on ne peut que fournir les visualisations en question ci-dessus.





∗. Ce résultat se trouve dans l'article 62 des Recherches arithmétiques de Gauss.