

Qu'est-c'qu'on s'ennuie avec eux ! Pourquoi l'argument des "deux zéros conjugués" ne constitue pas une démonstration de l'hypothèse de Riemann

Cette note commente un billet humoristique (image jointe, non un article scientifique) reprenant la formule explicite de Riemann pour $\pi(x)$ (ou une fonction apparentée), et suggérant que la présence d'une paire de zéros hors de la droite critique, conjugués l'un de l'autre, forcerait une conclusion absurde sur le nombre de nombres premiers - chute volontairement présentée comme "ne voulant strictement rien dire". Le texte est une auto-dérision assumée, mais il vaut la peine de préciser *pourquoi*, techniquement, l'idée ne peut pas être transformée en argument valide.

1. L'énoncé de départ

La formule explicite de von Mangoldt s'écrit, pour $x > 1$,

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}),$$

ou, sous la forme citée dans l'image, en termes de Li :

$$f(x) = \text{Li}(x) + \sum_{\rho} \left(\text{Li}(x^{\rho}) + \text{Li}(x^{1-\rho}) \right) + \int_x^{\infty} \frac{du}{(u^2 - 1) \ln u} - \ln 2,$$

où la somme porte sur *tous* les zéros non triviaux ρ de ζ , appariés à leur symétrique $1 - \rho$ par l'équation fonctionnelle.

L'idée du billet : si $\rho = \alpha + \beta i$ avec $\alpha \neq 1/2$ (donc un zéro hors de la droite critique), alors ρ et $1 - \rho$ ont des parties réelles distinctes, et l'ajout des deux logarithmes intégraux correspondants ferait apparaître un "défaut de compensation" des parties imaginaires, conduisant à une conclusion numérique absurde - d'où contradiction, d'où RH.

2. Pourquoi cela ne fonctionne pas

Remarque : [La somme n'est que conditionnellement convergente] La série $\sum_{\rho} x^{\rho}/\rho$ (et son analogue en Li) ne converge que si l'on somme les zéros par paquets d'ordonnée croissante, $|\text{Im}(\rho)| \leq T$, puis en faisant $T \rightarrow \infty$. Elle ne converge pas absolument. On ne peut donc jamais extraire la contribution d'une paire de zéros isolée et lui attribuer un sens arithmétique indépendant : seule la limite complète (sur *tous* les zéros) redonne $\psi_0(x)$ ou $\pi(x)$. Un calcul portant sur deux zéros seuls n'est la contribution de rien de précis.

Remarque : [La symétrie fait intervenir quatre zéros, pas deux] Les coefficients de Dirichlet de ζ étant réels, à tout zéro ρ correspond aussi son conjugué $\bar{\rho}$. Si $\rho = \alpha + \beta i$ avec $\alpha \neq 1/2$, la présence d'un zéro hors de la droite critique impose la présence de *quatre* zéros distincts :

$$\rho, \quad 1 - \rho, \quad \bar{\rho}, \quad 1 - \bar{\rho},$$

regroupés en deux paires conjuguées $(\rho, \bar{\rho})$ et $(1 - \rho, 1 - \bar{\rho})$, chacune contribuant un terme réel via

$$2 \operatorname{Re}(\operatorname{Li}(x^\rho)) \quad \text{et} \quad 2 \operatorname{Re}(\operatorname{Li}(x^{1-\rho})).$$

Il n’y a donc, à ce stade, aucune asymétrie apparente entre les deux paires : les parties imaginaires s’annulent bien à l’intérieur de chaque paire conjuguée, comme elles le feraient sur la droite critique. Le “défaut de compensation” évoqué dans le billet ne provient pas de la non-annulation des parties imaginaires (qui s’annulent effectivement par conjugaison), mais viendrait, s’il existait, d’une différence entre les deux quantités réelles $2 \operatorname{Re}(\operatorname{Li}(x^\rho))$ et $2 \operatorname{Re}(\operatorname{Li}(x^{1-\rho}))$ - deux nombres transcendants qui varient continûment avec x , sans aucune raison de tomber sur un entier, *a fortiori* un entier pair permettant une “contradiction” numérique.

Remarque : [Ce qu’il faudrait démontrer pour que l’idée fonctionne] Pour transformer l’intuition en argument valide, il faudrait établir qu’un zéro hors de la droite critique introduit, dans la somme complète (et non dans deux termes isolés), un écart qui ne peut *jamais* être compensé par le reste de la série infinie, pour au moins une valeur de x - typiquement via des bornes de densité des zéros, des estimations de convexité sur ζ , ou un contrôle uniforme du reste de la formule explicite. C’est exactement le type de travail analytique fin qu’exigent les véritables tentatives sérieuses sur RH (cf. par exemple l’approche de Connes citée par ailleurs), et rien de tel n’est - ni ne pouvait être - esquissé dans un argument portant sur deux (ou quatre) zéros isolés.

3. Conclusion

L’observation de départ - la symétrie par conjugaison complexe et par l’équation fonctionnelle, qui impose quatre zéros associés à tout zéro hors de la droite critique - est correcte et bien connue. Mais en tirer une contradiction numérique suppose d’isoler la contribution de ces zéros dans une somme qui n’a de sens que prise dans son ensemble, et de leur attribuer une compensation arithmétique qu’aucune propriété analytique établie ne garantit. L’humour du billet original tenait précisément à ce glissement assumé entre une vraie propriété de symétrie et une fausse déduction numérique.