

Alain Connes : une autre vision de l'espace

Il est difficile de présenter Alain Connes sans commencer par évoquer brièvement son impressionnant curriculum vitae. Né en 1947, élève de l'Ecole Normale Supérieure (1966-1970), après un passage au CNRS, il est successivement professeur à Paris 6, directeur de recherche au CNRS, et depuis 1984 professeur au Collège de France, où il occupe la chaire d'Analyse et Géométrie. Parallèlement, il est depuis 1979 professeur à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques à Bures-sur-Yvette. Il partage sa vie mathématique entre ces deux lieux : l'IHES lui offre le calme pour s'adonner à ses recherches et la possibilité de

rencontrer des mathématiciens et des physiciens théoriciens de tous pays et de toutes spécialités ; le Collège de France lui donne l'occasion, chaque année, de présenter dans un cours ses résultats les plus récents. Depuis 2003 il est aussi professeur à l'Université de Vanderbilt aux Etats-Unis. Il a reçu les plus hautes distinctions internationales : la médaille Fields (1982) et le prix Crafoord (2001), deux prix dont le prestige est comparable au prix Nobel, qui, on le sait, n'existe pas pour les mathématiques. En France, où il est membre de l'Académie des Sciences depuis 1983, il vient de recevoir, en décembre 2004, la médaille d'or du CNRS.

La thèse : classification des facteurs de type III

Pour comprendre qui est Alain Connes, il faut discerner quelles furent les différentes étapes de sa vie mathématique. Dans un premier temps, il s'est imposé comme un jeune mathématicien au talent exceptionnel, en résolvant un problème reconnu difficile par les spécialistes, mais considéré par beaucoup à l'époque



comme marginal par rapport aux « grandes mathématiques ».

Il suivait alors le séminaire d'algèbres d'opérateurs de Jacques Dixmier à l'Ecole Normale Supérieure, où l'on parlait notamment d'algèbres de von Neumann. Ces algèbres sont des généralisations non commutatives, ou si l'on préfère, quantiques, de la théorie de la mesure. Elles avaient été introduites par von Neumann dès les années 20 ou 30 pour donner un fondement mathématique à la mécanique quantique qui venait d'être découverte.

Etant donné un espace de Hilbert H on considère l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs

bornés sur H . On considère des algèbres d'opérateurs, c'est-à-dire des sous-algèbres A de $\mathcal{L}(H)$ telles que si un opérateur T appartient à A , il en est de même de son adjoint T^* . On impose de plus à la sous-algèbre A une condition topologique : on dit que A est une algèbre de von Neumann si elle est stable par convergence faible ou forte (c'est la convergence simple sur tout vecteur de H) ; on dit que A est une C^* -algèbre si elle est stable pour la convergence normique (c'est la convergence uniforme sur la boule unité de H).

Parmi les algèbres de Von Neumann, un rôle fondamental est joué par les **facteurs**, c'est-à-dire les algèbres de von Neumann dont le centre est réduit aux scalaires. Murray et von Neumann, dans les années 1930, avaient tenté une classification des facteurs, qu'ils répartirent en trois classes.

Les facteurs de classe I et II sont les plus proches du cas commutatif, avec une notion de trace et de dimension : une trace est une forme linéaire positive τ qui vérifie la propriété $\tau(xy) = \tau(yx)$. Le type I est celui des algèbres de matrices $M_n(\mathbb{C})$, ou en dimension infinie, de l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert. On a alors la trace usuelle des

opérateurs, qui a la propriété d'intégralité : elle prend des valeurs entières sur les projecteurs (éléments p tels que $p^2 = p = p^*$). Mais il y a aussi des facteurs admettant une trace qui prend des valeurs réelles quelconques sur les projecteurs : c'est le type II.

Murray et von Neumann découvrirent aussi l'existence d'objets hautement non commutatifs, dit facteurs de type III, qui n'admettent aucune trace. Jusqu'aux années 1970, ces facteurs étaient restés mystérieux et résistaient à toute tentative de classification. Lorsque Alain Connes arrive au séminaire Dixmier, on en est encore là, mais les travaux de Powers, Araki et Woods ont produit de nouveaux exemples de facteurs de type III, et même une infinité de tels facteurs deux à deux non isomorphes. Le génie d'Alain Connes a été d'appliquer à ces objets une théorie encore nouvelle et peu exploitée, due au mathématicien japonais Minoru Tomita. Un facteur de type III n'ayant pas de trace, on remplace la notion de trace par celle de poids. Un poids est une forme linéaire positive φ , mais *a priori* $\varphi(yx) \neq \varphi(xy)$. La surprise, c'est que **la non commutativité engendre une dynamique**, une évolution au cours du temps donnée par un groupe d'automorphismes à un paramètre du facteur.

Plus précisément, on a pour tous les $t \in \mathbf{R}$ des automorphismes σ_t du facteur M , avec la loi de groupe $\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{t+s}$, qui permettent de corriger la non commutativité via la formule dite KMS_β :

$$\varphi(yx) = \varphi(x\sigma_{i\beta}(y))$$

où $\sigma_{i\beta}$ s'obtient par prolongement analytique, pour un certain $\beta > 0$.

Connes a montré que ce groupe à un paramètre est en fait indépendant du poids, modulo les automorphismes intérieurs, et donne lieu à des invariants spectraux qui permettent de classer les facteurs de type III. Connes a ainsi introduit dans sa thèse (1973) les facteurs dits III_λ où λ est un nombre réel entre 0 et 1. Cette solution, par un jeune thésard encore inconnu, d'un problème ouvert depuis des décennies a profondément impressionné Jacques Dixmier et l'ensemble des spécialistes des algèbres d'opérateurs. Cependant, la majorité des mathématiciens français ignoraient alors la théorie de von Neumann, et le problème de la classification des facteurs n'était pas considéré comme un des principaux défis des mathématiques. Ce sont surtout les physiciens théoriciens qui ont reconnu le génie d'Alain Connes. La mécanique statistique quantique, ainsi que certains modèles de théorie des champs, utilisent en effet les algèbres de von Neumann de façon essentielle.

La statistique de Boltzmann associée à un hamiltonien H est donnée (sur une observable A) par le poids

$$\varphi(A) = \text{Trace}(Ae^{-\beta H}) / \text{Trace}(e^{-\beta H})$$

et l'évolution dans le temps par les automorphismes

$$\sigma_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}.$$

Le lecteur vérifiera sans peine la formule KMS_β ci-dessus. Le groupe à un paramètre associé à un poids modélise l'évolution dans le temps d'un système statistique quantique associé à un état de température donné (comme d'habitude, $\beta = 1/kT$ où k est la constante de Boltzmann et T la température absolue).

Aussi, lorsque Connes devient visiteur à l'IHES, c'est en tant que physicien théoricien.

Des facteurs aux feuilletages : vers la géométrie non commutative

Cette arrivée de Connes à l'IHES est un tournant de sa carrière scientifique. En effet, il entre en contact avec des mathématiciens qui, s'ils ignorent tout de la théorie des facteurs de type III, jonglent quotidiennement avec des faisceaux et des feuilletages, avec des groupes d'homologie et des tenseurs de courbure. La géométrie différentielle et la géométrie algébriques sont considérées par la communauté mathématique comme plus centrales, pour ne pas dire plus nobles, que la théorie des algèbres d'opérateurs. Mais Connes ne se laisse pas impressionner. Il raconte, avec sa modestie habituelle, et quelque exagération, qu'il ne comprenait rien aux conversations de ses collègues avec qui il déjeûnait à la cafétéria de l'Institut. Mais qu'on ne s'y trompe pas, Alain Connes a une faculté étonnante d'assi-

miler de nouvelles notions. Et pour apprendre une théorie mathématique, au lieu de se plonger dans les livres, il préfère discuter avec d'autres mathématiciens, se faire expliquer puis retrouver par lui-même toute la théorie. Et il fait cela très vite. Aussi a-t-il très rapidement compris la théorie des feuilletages, et vu le lien avec la théorie de von Neumann. Un feuilletage est un objet géométrique qui est localement trivial comme un mille-feuille, mais qui globalement a une structure dynamique non triviale. Connes définit alors l'algèbre de von Neumann associée à un feuilletage, qui est en général un facteur, souvent de type III, le groupe à un paramètre de la théorie de Tomita ayant une interprétation géométrique très simple. Il définit aussi la C^* -algèbre associée à un feuilletage, et dans l'esprit d'Atiyah et Singer montre un théorème d'indice pour les opérateurs elliptiques le long des feuilles d'un feuilletage transversalement mesuré. D'où l'idée de **géométrie non commutative**. L'espace des feuilles d'un feuilletage est un ensemble non dénombrable sur lequel on serait bien en peine de définir, au sens classique, une théorie de la mesure, ou une topologie, voire une structure différentiable.

Expliquons cela par un exemple, celui du feuilletage du tore bidimensionnel par une droite de pente irrationnelle. On se donne un carré dans le plan ; après recollage des côtés opposés, on obtient un tore, qui est une variété compacte de dimension 2. On se donne une direction D dans le plan. Partant d'un point x_1 du bord inférieur I , on construit une suite de segments de droites dans le carré de la façon suivante : le premier segment est issu de x_1 ; chaque segment est parallèle à D et a son origine et son extrémité sur le bord du carré ; chaque fois qu'un point du bord est extrémité d'un segment, l'origine du segment suivant est le point opposé du bord. On obtient ainsi une famille de segments tracés à l'intérieur du carré, et après recollage des bords, on obtient une trajectoire sur le tore, appelé **feuille** (du point de vue de la géométrie riemannienne, c'est une géodésique de la métrique plate sur le tore). Le **feuilletage** est donné par la partition ainsi obtenue de la variété (ici le tore) en feuilles. Voir les figures ci-contre où l'on a noté $x_2, x_3, \dots$ les points obtenus sur le segment I .

Il faut distinguer deux cas. Supposons que la pente de D soit rationnelle. Le processus est périodique (sur la figure, la pente est égale à 2). Il n'y a qu'un nombre fini de segments, la trajectoire sur le tore est périodique. L'espace des trajectoires est bien décrit par l'algèbre commutative des fonctions continues sur un intervalle (ici la moitié de l'intervalle I). C'est un espace usuel, dit commutatif.

Prenons au contraire pour la pente de D un nombre θ irrationnel. On a tracé les quatre premiers points situés sur I de la trajectoire de x_1 et les deux premiers points de celle de y_1 . Chaque trajectoire est infinie (on ne revient jamais au point de départ) et dense. Si on veut décrire l'espace des trajectoires par des fonctions continues sur I , celles-ci doivent avoir la même valeur sur les points d'une même trajectoire, donc être constantes. L'algèbre de ces fonctions est l'algèbre des nombres complexes. Elle ne donne aucun renseignement sur l'espace $\mathcal{T}_\theta$ des feuilles. Alain Connes propose de décrire $\mathcal{T}_\theta$ par une algèbre non commutative. En ce sens, **l'espace des feuilles est un espace non commutatif**.

Un autre exemple d'espace non commutatif est l'espace des orbites de l'action d'un groupe discret sur une variété compacte. Le cas le plus simple, intimement lié au feuilletage ci-dessus, est celui où la variété est le cercle muni de l'action du groupe $\mathbb{Z}$ engendrée par une rotation d'angle $2\pi\theta$. Là encore les orbites sont denses si θ est irrationnel et l'espace des orbites doit être décrit par une algèbre non commutative.

Pour définir l'algèbre du feuilletage du tore ci-dessus, on considère des noyaux $k(x, y)$ définis sur les couples de points x et y situés sur une même feuille, continus et à support compact sur chaque feuille. On multiplie ces noyaux par le produit usuel de convolution des noyaux :

$$k_1 * k_2(x, y) = \int k_1(x, z)k_2(z, y)dz$$

où l'intégrale est prise sur la feuille, pour la mesure de Lebesgue. De tels noyaux peuvent être interprétés comme des familles d'opérateurs indexés par les feuilles. En complétant l'algèbre ainsi obtenue, on définit alors d'une part l'algèbre de von Neumann du feuilletage, et d'autre part la C^ -algèbre du même feuilletage. De même, dans le cas de l'action de $\mathbb{Z}$ on considère des matrices à support fini $a_{i,j}$ indexées par des couples (i, j) d'éléments d'une même orbite, et qu'on multiplie par le produit usuel des matrices, et on définit ainsi l'algèbre de von Neumann et la C^* -algèbres associées.*

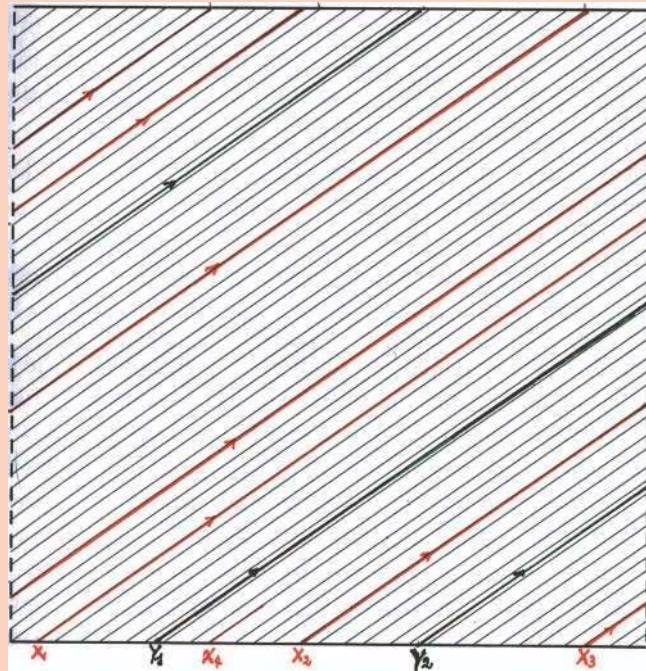


Figure 1 – Pente irrationnelle.

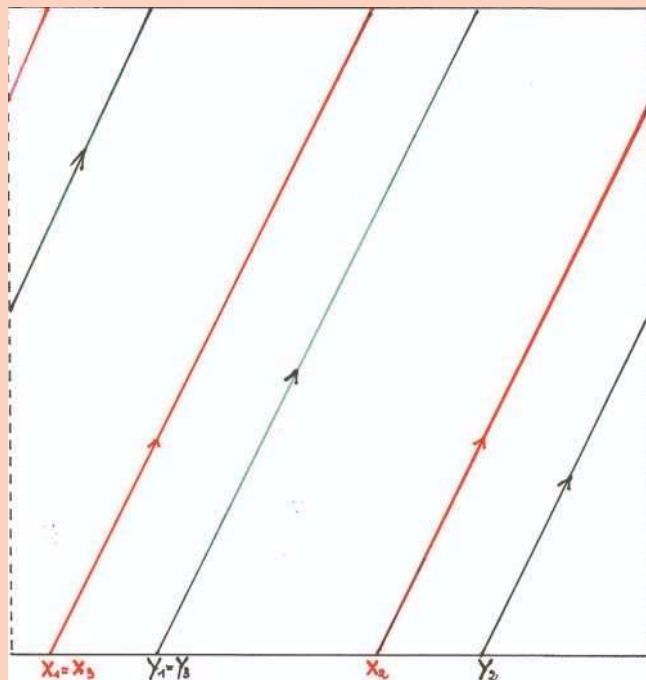


Figure 2 – Pente rationnelle.

Notons que dans les deux exemples ci-dessus les facteurs obtenus sont de type II. Cela est dû au fait que l'action de la rotation sur le cercle préserve la mesure de Lebesgue (ou pour le feuilletage, le flot des trajectoires préserve une mesure transverse), d'où une trace sur l'algèbre. Mais on construit facilement des exemples sans mesure invariante, et on obtient alors le type III.



Figure 3 – Feuilletage du tore.

Ces géométries « non commutatives » sont donc décrites au moyen d'algèbres non commutatives qui jouent le rôle d'espaces de fonctions. Ainsi un espace mesuré X est décrit par l'algèbre $L^\infty(X)$ des fonctions mesurables bornées, qui est une algèbre de von Neumann commutative. Pour l'espace des feuilles d'un feuilletage, c'est l'algèbre de von Neumann (non commutative) associée qui joue le rôle d'algèbre de fonctions mesurables bornées sur l'espace des feuilles. De même pour la topologie : un espace topologique compact X est décrit par l'algèbre des fonctions continues sur X . Pour un feuilletage, la C^* -algèbre (non commutative) associée est considérée comme l'algèbre des fonctions continues sur l'espace « non commutatif » des feuilles. Ce qui est fait pour un feuilletage peut aussi se faire pour l'action d'un groupe discret sur un espace compact. L'espace des orbites est lui aussi un espace « non commutatif » décrit par une C^* -algèbre (du point de vue topologique) ou une algèbre de von Neumann. D'autres espaces non commutatifs sont des espaces d'orbites de relations d'équivalences, ou bien sont définis par des groupoïdes. Un autre cas intéressant est celui des groupes : le dual d'un groupe, c'est-à-dire l'espace des classes d'équivalences de représentations unitaires irréductibles, est aussi un espace non commutatif : dans le cas des groupes de Lie ou des groupes p -adiques, cet espace désingularise le dual décrit par la théorie des représentations, mais dans le cas des groupes discrets, on obtient un espace non commutatif hautement non trivial et encore mal connu.

K-théorie et homologie cyclique

Un invariant de topologie algébrique qui se généralise sans difficulté au cas non commutatif est la **K-théorie**. C'est un groupe abélien $K(X)$ attaché à un espace topologique X (disons, compact) et qui classe (à isomorphisme stable près) les fibrés vectoriels sur X .

Deux fibrés E_1 et E_2 sur X sont stablement isomorphes s'il existe un fibré F tel que les fibrés sommes directes $E_1 \oplus F$ et $E_2 \oplus F$ soient isomorphes. Sur l'ensemble des classes d'isomorphisme stable de fibrés, on définit l'addition par la somme directe des fibrés, et $K(X)$ n'est autre que le groupe (dit de Grothendieck) des différences formelles de classes de fibrés, exactement comme dans la construction de l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs à partir des entiers naturels.

On sait depuis Atiyah et Singer que cet invariant joue un rôle crucial dans la théorie de l'indice. Par un théorème dû à Serre, les fibrés sur X correspondent à certains modules sur l'algèbre $C(X)$. On peut alors définir la K -théorie d'une C^* -algèbre et donc d'un espace topologique non commutatif. Dans le début des années 1980, Connes s'est intéressé à cet invariant, et a compris, avec Georges Skandalis, l'intérêt de la K -théorie bivariante développée à ce

moment là par le mathématicien russe Gennadi Kasparov. Ils ont montré, dans l'esprit de Grothendieck et en réinterprétant une des preuves d'Atiyah et Singer, comment le théorème de l'indice pour les opérateurs elliptiques sur des variétés compactes se ramenait à une propriété de fonctorialité en théorie de Kasparov. De là la généralisation aux feuilletages était naturelle. Il devenait donc naturel de calculer la K -théorie d'espaces non commutatifs comme les feuilletages, les groupes ou les actions de groupes. Dès 1980 lors d'un congrès à Kingston (Ontario), Alain Connes a eu l'intuition d'une interprétation géométrique de la K -théorie de la C^* -algèbre d'un feuilletage ou d'un groupe. De ses discussions avec le topologue Paul Baum, qu'il rencontre alors, jaillira l'idée d'une conjecture, désormais célèbre sous le nom de **conjecture de Baum-Connes** : le groupe de K -théorie analytique (c'est-à-dire la K -théorie de la C^* -algèbre du groupe ou du feuilletage) est isomorphe, *via* une flèche d'indice, à un groupe de K -théorie dit géométrique, construit à partir du classifiant des actions propres du groupe (ou du groupoïde d'holonomie du feuilletage). Cette conjecture est liée à la théorie des représentations des groupes de Lie (séries discrètes), à la topologie (conjecture de Novikov sur l'invariance par homotopie des hautes signatures), à la géométrie riemannienne (conjecture de Gromov-Lawson sur les obstructions à l'existence de métriques riemanniennes à courbure scalaire positive), à l'algèbre (conjecture des idempotents).

Précisée par la suite avec N. Higson, la conjecture de Baum-Connes sera le point de départ des travaux de nombreux mathématiciens pendant au moins 20 ans. Parmi les résultats les plus spectaculaires, citons :

- *le travail de N. Higson et G. Kasparov en 1996 qui établit la conjecture pour les groupes ayant la propriété dite de Haagerup ou a -T-menabilité (Gromov) ; c'est une classe de groupes relativement vaste, elle contient les groupes moyennables, mais exclut par exemple les groupes discrets possédant une propriété de rigidité dite propriété T de Kazhdan.*
- *la thèse de Vincent Lafforgue en 1998, qui pour la première fois prouve la conjecture de Baum-Connes pour certains groupes discrets ayant la propriété T . Elle a également permis de démontrer la conjecture pour tous les groupes localement compacts connexes.*

Malgré le nombre de résultats établissant la conjecture pour des groupes particuliers, un cas aussi simple que celui de $SL(3, \mathbb{Z})$, le groupe des matrices 3 sur 3 à coefficients entiers et de déterminant égal à 1 (ce groupe a la propriété T), est ouvert, sans qu'on ait aucune idée d'approche. Inversement, on peut tenter de construire des groupes suffisamment sauvages pour être des contre-exemples à la conjecture. L'idée puissante de M. Gromov de construire des groupes aléatoires en sorte qu'ils aient des propriétés très éloignées des groupes pour lesquels la conjecture est actuellement prouvée, est prometteuse. Mais pour l'instant, elle n'a réussi à fournir que des contre-exemples à une conjecture, dite conjecture de Baum-Connes à coefficients, qui est plus forte que la conjecture de Baum-Connes classique.

Mais la K -théorie n'est pas le seul invariant intéressant en topologie algébrique. Une question naturelle est de définir l'homologie, ou la cohomologie d'un espace topologique non commutatif. Pour cela, il faut faire un détour par la géométrie différentielle. On sait que dans le cas classique, l'homologie (ou la cohomologie) peut être définie comme (co)homologie singulière (au moyen de triangulations par des simplexes ou des cycles singuliers) ou bien de façon équivalente comme cohomologie de Čech, décrite au moyen de cocycles associés à un recouvrement par une famille d'ouverts. Il s'agit là de définitions topologiques de la (co)homologie à coefficients entiers, naturellement invariantes par homéomorphisme, mais difficilement généralisables dans le cas non commutatif. Si l'espace topologique est de plus muni d'une structure de variété différentiable, alors il y a une autre définition de la cohomologie (à coefficients réels ou complexes), celle de de Rham, obtenue à partir du complexe des formes différentielles. C'est cette dernière définition qui est retenue par Connes pour le cas non commutatif. Mais le prix à payer, c'est qu'il faut choisir une certaine sous-algèbre dense de la C^* -algèbre, jouant le rôle de l'algèbre des fonctions lisses (de classe C^∞ , par exemple). Le point de départ est dans des calculs de géométrie non commutative : le calcul de caractères de Chern de modules de Fredholm fait apparaître une généralisation de la notion de trace. Ainsi un 2-cocycle cyclique est une forme trilinéaire sur une algèbre vérifiant les formules :

$$\tau(a_0, a_1, a_2) = \tau(a_1, a_2, a_0)$$

$$\tau(a_0 a_1, a_2, a_3) - \tau(a_0, a_1 a_2, a_3) + \tau(a_0, a_1, a_2 a_3) - \tau(a_3 a_0, a_1, a_2) = 0$$

A partir de la notion de n -cocycles, Alain Connes définit en 1981 la **cohomologie cyclique** d'une algèbre. Il développe cette théorie purement algébrique, découvre la longue suite exacte qui permet de la calculer. L'homologie

cyclique a depuis été abondamment utilisée par les algébristes, indépendamment des motivations d'Alain Connes qui, lui, revient toujours à son idée : la géométrie non commutative. L'un des problèmes les plus difficiles est de bien choisir la sous-algèbre dense de la C^* -algèbre : il faut qu'elle soit suffisamment petite pour qu'on puisse calculer sa cohomologie cyclique, mais suffisamment grosse pour avoir la même K -théorie que la C^* -algèbre. Une bonne partie des articles d'Alain Connes dans les années 1980 tournent autour de cette problématique, appliquée au cas des feuilletages ou au cas essentiellement équivalent des actions de groupes discrets sur des variétés. Il définit dans ce cadre la classe fondamentale transverse, analogue de la classe fondamentale d'une variété (qui appartient à l'homologie de la variété). En particulier, il donne une interprétation de la **classe de Godbillon-Vey** d'un feuilletage de codimension 1 en terme de cohomologie cyclique et donc d'accouplement avec la K -théorie.

Un feuilletage de codimension 1 est donné par une équation $\vartheta = 0$, où ϑ est une 1-forme satisfaisant la condition d'intégrabilité $d\vartheta \wedge \vartheta = 0$. On a donc $d\vartheta = \alpha \wedge \vartheta$ où α est une 1-forme. On considère alors la 3-forme $\alpha \wedge d\alpha$, et un calcul simple montre que sa classe de cohomologie ne dépend que du feuilletage. C'est l'invariant de Godbillon-Vey du feuilletage.

Alain Connes tire de son interprétation de cette classe un corollaire frappant : si la classe de Godbillon-Vey est non nulle, alors le flot des poids de l'algèbre de von Neumann préserve une mesure de masse finie (et elle est de type III). Ce superbe théorème de Connes peut aussi se démontrer de manière élémentaire sans aucune homologie cyclique, mais il montre toute la force et la beauté du point de vue géométrie non commutative. On voit là une des caractéristiques de la pensée d'Alain Connes qui est sa profonde unité. En développant la K -théorie et l'homologie cyclique des feuilletages, il n'oublie pas son point de départ, la classification des facteurs de type III.

Un autre succès important de cette méthode de géométrie *différentielle* non commutative est d'avoir donné la première preuve de la conjecture de Novikov pour les groupes hyperboliques au sens de Gromov. Dans ce cas l'algèbre de « fonctions lisses » sur le dual du groupe (vu comme espace non commutatif) est l'algèbre de fonctions à décroissance rapide définie par Paul Jolissaint.

Triplets spectraux et indice transversal

Jusque là, les théorèmes d'indices rencontrés dans le cadre des feuilletages sont des théorèmes d'indice **longitudinaux** : on considère des opérateurs elliptiques le long des feuilles du feuilletage, et l'indice d'un tel opérateur est un élément de la K -théorie de la C^* -algèbre du feuilletage, c'est-à-dire la K -théorie de l'espace non commutatif des feuilles. Pour obtenir un indice qui soit un nombre, on l'évalue sur une classe d'homologie de cet espace, c'est-à-dire de la cohomologie cyclique de l'algèbre du feuilletage. Mais il y a un problème plus difficile auquel Alain Connes va s'attaquer dans les années 1990, en collaboration avec Henri Moscovici. C'est la question du théorème d'indice **transverse** : cette fois on veut vraiment considérer un opérateur elliptique sur l'espace non commutatif des feuilles, c'est donc un opérateur transversalement elliptique, dont Connes et Moscovici montrent qu'il définit un élément de la K -homologie du feuilletage (la K -homologie est la théorie duale de la K -théorie), donc une application de la K -théorie vers $\mathbb{Z}$, l'anneau des entiers. Le but du théorème d'indice transversal est de donner cette application de la K -théorie vers $\mathbb{Z}$ de façon concrète, c'est-à-dire au moyen d'un cocycle cyclique, pour lequel une formule explicite est donnée. Il y a d'abord une première difficulté : fabriquer de tels opérateurs transversalement elliptiques, sans aucune hypothèse sur le feuilletage : ainsi on ne veut pas se restreindre au cas où le feuilletage aurait une métrique riemannienne transversale invariante par holonomie. Pour cela, Connes et Moscovici procèdent en deux étapes ; d'abord on grossit l'espace pour prendre celui de toutes les métriques transversales, ensuite on admet, au lieu d'opérateurs elliptiques, des opérateurs hypoelliptiques. Moyennant quoi on obtient un **triplet spectral** sur l'espace non-commutatif des feuilles.

Etant donné un espace non commutatif dont la topologie est décrite par une C^ -algèbre A , on se donne un espace de Hilbert H dans lequel est représentée A , et un opérateur (non borné) autoadjoint D à résolvante compacte (l'opérateur $1 + D^2$ est d'inverse compact) et tel que les commutateurs $[D, a]$ soient bornés pour a dans une certaine sous-algèbre dense de A . Dans le cas de l'opérateur de Dirac sur une variété riemannienne, ce commutateur redonne la métrique, c'est-à-dire l'élément de longueur infinitésimal ds^2 . La notion de triplet spectral permet de définir l'analogue non commutatif de la notion de variété riemannienne.*

Il reste alors à calculer le caractère de Chern de ce triplet spectral. Ce qu'ils font en utilisant la notion de trace de Dixmier et de résidu de Wodzicki. La formule obtenue est à la fois très simple par son élégance, et très compliquée par le nombre de termes impliqués dès qu'on veut l'expliciter. Ainsi, même dans le cas d'un feuilletage de codimension 1, il faut une bonne centaine de pages pour mener le calcul ... Dans le cas général, cela est quasiment impossible, sauf si l'on peut comprendre un principe permettant d'organiser et de simplifier ces calculs. Comme c'est en général le cas en mathématiques, un tel principe simplificateur est fourni par la notion de **symétrie**. Classiquement, la symétrie est décrite par un groupe ; ici, dans une situation non commutative, c'est une **algèbre de Hopf** ou **groupe quantique** : il s'agit d'un objet qui se comporte comme un groupe, sauf que l'ensemble des éléments du groupe n'est pas vraiment un ensemble ou un espace, mais un espace non-commutatif. L'idée est que ce groupe quantique agit sur l'espace non commutatif, d'où l'on déduit une application caractéristique qui permet de pousser la cohomologie cyclique du groupe quantique (qui se calcule, c'est la cohomologie de Gelfand-Fuchs) dans la cohomologie cyclique de notre espace non commutatif. Il se fait alors que le caractère du triplet spectral est dans l'image de cette application caractéristique, et alors tout se calcule explicitement grâce à la cohomologie de Gelfand-Fuchs, au moyen de polynômes universels analogues à ceux qui apparaissent dans les théorèmes d'indice classiques.

Retour à la physique

C'est là qu'a lieu, de façon inattendue, un retour à la physique, via les algèbres de Hopf. Les calculs des physiciens en théorie quantique des champs reposent sur des méthodes de développement perturbatifs où les termes sont des intégrales divergentes, qui nécessitent une **renormalisation**. Ces techniques de renormalisation font apparaître la combinatoire des **diagrammes de Feynmann**. Des formules empiriques dites de Bogoliubov-Parashiuk ramènent les calculs de diagrammes compliqués à des diagrammes plus simples. Or en 1998, le physicien Dirk Kreimer découvre que ces formules qui n'étaient *a priori* que de simples recettes, traduisent l'existence d'un objet mathématique, qui n'est autre qu'une algèbre de Hopf ou groupe quantique. C'est là que Connes rencontre Kreimer, et ils découvrent ensemble que l'algèbre de Hopf de Kreimer et celle de Connes-Moscovici sont essentiellement les mêmes. Autrement dit, ce sont les mêmes règles de symétries quantiques qui régissent d'une part les calculs de théorie quantique des champs (permettant de calculer, par des méthodes perturbatives, des quantités physiquement observables), d'autre part les calculs de géométrie non commutative (donnant explicitement l'indice d'opérateurs transversalement elliptiques sur des feuilletages).

Un pas de plus a ensuite été franchi par Connes et Kreimer pour comprendre l'origine mathématique de cette algèbre de Hopf et son rôle dans le processus de renormalisation : ce processus n'est autre que la décomposition de Birkhoff, et ceci établit un lien direct et très simple avec le **problème de Riemann-Hilbert**. Ainsi, ce qui était au départ recette empirique, justifiée par l'expérience physique, est maintenant relié à un des grands problèmes des mathématiques, et non des moindres puisque le problème de Riemann-Hilbert est le 21^{ème} de la liste des 23 problèmes proposés par David Hilbert au congrès international de Paris en 1900.

Enfin, dans sa collaboration récente avec Matilde Marcolli, Alain Connes a trouvé la signification mathématique de cette correspondance de Riemann-Hilbert : cette dernière est reliée à la **théorie de Galois motivique**, introduite par Grothendieck. Elle fait apparaître un groupe de symétrie dont Pierre Cartier avait conjecturé l'existence sous le nom de « groupe de Galois cosmique » et qui est donc de nature arithmétique. Ainsi la géométrie non commutative relie la physique à la théorie des nombres. On entrevoit ainsi le lien entre ces deux univers mystérieux, celui des particules élémentaires et celui des nombres premiers, qui ont toujours fasciné Alain Connes.

Pierre JULG
Université d'Orléans et CNRS
UMR 6628-MAPMO
BP 6759
45067 Orléans Cedex 2
Pierre.Julg@univ-orleans.fr

L'auteur remercie Alain Connes d'avoir relu son texte et de lui avoir suggéré quelques améliorations. Il remerci également Claire Anantharaman de lui avoir permis d'utiliser les posters qu'elle avait conçus en vue de la Journée Portes Ouvertes de l'Université d'Orléans.