Explication pour une question qu'on s'était posée (Denise Vella-Chemla, juin 2023)

L'inverse complexe du cercle unité (parcouru dans un sens) est le cercle unité (parcouru dans l'autre sens) tandis que l'inverse d'un cercle de rayon unité mais décalé à droite (i.e. de diamètre [0,2] au lieu de [-1,1]) est une droite, pourquoi ?

Texte du programme python utilisé "pour voir".

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from cmath import *

fig, ax = plt.subplots(1)
cercle unite
theta = np.linspace(0, 2*np.pi/3, 360)
r = 1.0
a = r*np.cos(theta)
b = r*np.sin(theta)
z = a+1j*b
ax.plot(a,b,color='black')
zprime = 1/z
aprime = zprime.real
bprime = zprime.imag
ax.plot(aprime,bprime,color='green')

theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 360)
r = 1.0
a = r*np.cos(theta)+1
b = r*np.sin(theta)
z = a+1j*b
print(z)
zprime = 1/z
aprime = zprime.real
bprime = zprime.imag
ax.plot(a,b, color='red')
ax.plot(aprime,bprime,color='yellow')
ax.set_aspect(1)
plt.grid(linestyle = '--')
plt.xlim(-1,3)
plt.ylim(-5,5)
plt.grid(linestyle='--')
plt.title('Dans le plan complexe, un cercle de rayon 1 qui passe par (0,0) et (2,0)
a pour inverse la droite de partie reelle 1/2.', fontsize=8)
plt.show()
```

Explication du phénomène :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^{i\theta}} &= \frac{1+e^{-i\theta}}{(1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})} \\
&= \frac{1+e^{-i\theta}}{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta} \\
&= \frac{1+e^{-i\theta}}{2+2\cos\theta} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(1+\cos\theta)-i\sin\theta}{(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{1}{2}-i\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \\
&= \frac{1+e^{-it}}{2+2\cos t} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(1+\cos t)-i\sin t}{1+\cos t} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-i\frac{\sin t}{1+\cos t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-i\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

en utilisant, à la dernière étape, les identités trigonométriques $\sin(2x) = 2(\sin x)(\cos x)$ et $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
Pour t variant de $0 \to 2\pi$, et donc $\frac{t}{2}$ de $0 \to \pi$, la partie imaginaire de l'inverse, $-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)$, varie de $0 \to +\infty$ puis de $-\infty \to 0$, parcourant ainsi l'ensemble de la droite réelle.

La partie réelle de l'inverse étant fixe, l'ensemble $\mathcal{C}^{-\infty}$ est la droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$.