Résoudre un système d'équations algébriques pour trouver un décomposant de Goldbach d'un nombre pair

Denise Vella-Chemla

27/10/2011

1 Rappels

La conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers. On rappelle qu'un nombre premier impair p est un décomposant de Goldbach de n un nombre pair supérieur ou égal à 6 si p n'est pas congru à n selon tout module premier impair p' inférieur à $\sqrt{n}$. En effet, dans le cas contraire, le complémentaire à n de p est composé.

Exemple : 19 est un décomposant de Goldbach de 98 car 19 est incongru à 98 selon 3, 5 et 7. Par contre, 3 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98 car $3 \equiv 98$ $(mod\ 5)$ (ce qui correspond au fait que 5 divise $98-3$). 5 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98 car $5 \equiv 98$ $(mod\ 3)$. 7 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98 car $7 \equiv 98$ $(mod\ 7)$ (ce qui correspond au fait que 7 divise $98-7$, 7 est diviseur de 98). 11 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98 car $11 \equiv 98$ $(mod\ 3)$. 13 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98 car $13 \equiv 98$ $(mod\ 5)$. 17 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98 car $17 \equiv 98$ $(mod\ 3)$.

2 Modéliser la recherche des décomposants de Goldbach par des équations algébriques

Chercher un décomposant de Goldbach p d'un nombre pair n revient donc simplement à chercher un nombre qui vérifie les conditions suivantes : d'une part, il est premier et d'autre part, son complémentaire à n est premier.

Lors de ces recherches autour de la conjecture de Goldbach, comme il s'agit de trouver les solutions entières d'équations, on a longuement buté sur un extrait de Galois qui écrit : *"Ensuite, pour avoir les solutions entières, il suffira, ainsi que M. Libri paraît en avoir fait le premier la remarque, de chercher le plus grand facteur commun à $Fx = 0$ et à $x^{p-1} = 1$"*. Récemment, on a pu trouver sur la toile la référence [2] dans laquelle Libri explique sa méthode simple pour trouver les solutions entières d'une équation polynomiale. On réalise à ces lectures que les nombres premiers 3, 5, 7 *et* 11, par exemple, sont tous racines de l'équation polynomiale

$$(x-3)(x-5)(x-7)(x-11) = 0.$$

En développant le produit, on obtient l'équation polynomiale suivante :

$$x^4 - 26x^3 + 236x^2 - 886x + 1155 = 0.$$

Les coefficients s'obtiennent ainsi :

$$\begin{aligned}
&26 = 3+5+7+11.\\
&236 = 3.5+3.7+3.11+5.7+5.11+7.11.\\
&886 = 3.5.7+3.5.11+3.7.11+5.7.11.\\
&1155 = 3.5.7.11.
\end{aligned}$$

Plus généralement, pour exprimer que x, le nombre à chercher, est premier, on utilise une équation polynomiale de la forme suivante :

$$x^{\pi(n)-1} - \sigma_1.x^{\pi(n)-2} + \sigma_2.x^{\pi(n)-3} - \sigma_3.x^{\pi(n)-1} + \ldots = 0$$

La plus grande puissance de x est $\pi(n) - 1$ où $\pi(n)$ est la notation habituelle pour le nombre de nombres premiers inférieurs à n, le -1 servant à éliminer le nombre premier 2. Les nombres σ_i désignent respectivement les sommes de produits de i nombres premiers pris parmi tous les nombres premiers impairs considérés. Par exemple, $\sigma_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 ... = 3 + 5 + 7 + 11 ...$, $\sigma_2 = p_1p_2 + p_1p_3 + ... + p_2p_3 + p_2p_4 + ...$ et le dernier σ est le produit de tous les nombres premiers impairs inférieurs à n.

Pour exprimer que $n - x$, le complémentaire du nombre à chercher doit être l'un des nombres premiers 3, 5, 7 *ou* 11, on utilise la même équation polynomiale en remplaçant x par $n - x$; si l'on considère les 4 premiers nombres premiers impairs seulement, l'équation polynomiale devient :

$$((n - x) - 3)((n - x) - 5)((n - x) - 7)((n - x) - 11) = 0.$$

En développant le produit, on obtient l'équation polynomiale suivante :

$$(n - x)^4 - 26(n - x)^3 + 236(n - x)^2 - 886(n - x) + 1155 = 0.$$

L'élévation aux différentes puissances du monôme $n - x$ donne les résultats ci-dessous :

$$\begin{array}{l} (n-x)^4 = x^4 - 4nx^3 + 6n^2x^2 - 4n^3x + n^4. \\ (n-x)^3 = -x^3 + 3nx^2 - 3n^2x + n^3. \\ (n-x)^2 = n^2 - 2nx + x^2. \end{array}$$

On reconnaît les coefficients du binôme C_i^j dans l'élévation de $n - x$ à la puissance i.

Si on développe et qu'on regroupe ensemble les coefficients concernant une même puissance de x, on obtient :

$$x^4+(-4n+26)x^3+(6n^2-78n+236)x^2+(-4n^3+78n^2-472n+886)x+(n^4-26n^3+236n^2-886n+1155) = 0$$

On reconnaît dans la dernière parenthèse le polynôme initial dans lequel x a été remplacé par n. Puis pour les coefficients des puissances supérieures de x, on voit qu'on dérive successivement le polynôme initial puis les polynômes obtenus, qu'on prend l'opposé du résultat à chaque fois et qu'on divise successivement les résultats intermédiaires par 2, 3, etc.

Pour le degré 4, le polynôme initial est :

$$n^4 - 26n^3 + 236n^2 - 886n + 1155$$

On le dérive et on en prend l'opposé :

$$-4n^3 + 78n^2 - 472n + 886$$

On dérive ce dernier, on en prend l'opposé et on divise le résultat par 2 :

$$6n^2 - 78n + 236$$

On dérive ce dernier, on en prend l'opposé et on divise le résultat par 3 :

$$-4n + 26$$

Les coefficients d'expression $\frac{(-1)^n P^{(n)}(x)}{n!}$ sont appelés coefficients du développement de Taylor.

On est donc systématiquement ramené au système d'équations à deux équations de degré i suivant, dont il faudrait réussir à prouver qu'il admet systématiquement au moins une solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x) : x^{\pi(n)-1} - \sigma_1.x^{\pi(n)-2} + \sigma_2.x^{\pi(n)-3} - \sigma_3.x^{\pi(n)-1} + \ldots = 0 \\ \sum_{i=0}^{i=\pi(n)-1} \frac{(-1)^i P^{(i)}(n)}{i!} x^i = 0 \end{array} \right.$$

3 Exemples

Traitons les exemples $n = 8$ et $n = 10$. Il n'y a que trois nombres premiers impairs inférieurs à n, $3,\ 5$ *et* 7.
L'équation polynomiale $(x-3)(x-5)(x-7) = 0$ se développe en $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$.
L'équation polynomiale portant sur $n - x$ se développe quant à elle en :
$-x^3 + (3n-15)x^2 + (-3n^2 + 30n - 71)x + (n^3 - 15n^2 + 71n - 105) = 0$.
Si on remplace n par 8, on aboutit au système :

$$\begin{cases} x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0 \\ -x^3 + 9x^2 - 23x + 15 = 0 \end{cases}$$

3 et 5 sont les seules solutions de ce système. Ce sont les décomposants de Goldbach de 8.

Si on remplace n par 10, on aboutit au système :

$$\begin{cases} x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0 \\ -x^3 + 15x^2 - 71x + 105 = 0 \end{cases}$$

Les deux équations sont équivalentes, 3 et 5 et 7 sont solutions de ce système, et sont décomposants de Goldbach de 10.

4 Passer d'un degré au degré supérieur

Considérons d'abord les deux premières équations des deux systèmes pour les degrés 4 et 5. On passe de l'équation :

$$x^4 - \sigma_{1,4}x^3 + \sigma_{2,4}x^2 - \sigma_{3,4}x + \sigma_{4,4} = 0$$

à l'équation :

$$x^5 - \sigma_{1,5}x^4 + \sigma_{2,5}x^3 - \sigma_{3,5}x^2 + \sigma_{4,5}x - \sigma_{5,5} = 0$$

Les coefficients de l'équation de degré 5 ont été obtenus ainsi à partir de ceux de l'équation de degré 4.

$$\begin{array}{lll} \sigma_{1,5} = \sigma_{1,4} & +p_5 \\ \sigma_{2,5} = \sigma_{2,4} & +\sigma_{1,4}.p_5 \\ \sigma_{3,5} = \sigma_{3,4} & +\sigma_{2,4}.p_5 \\ \sigma_{4,5} = \sigma_{4,4} & +\sigma_{3,4}.p_5 \\ \sigma_{5,5} = & \sigma_{4,4}.p_5 \end{array}$$

Plus généralement, si p_i désigne le $p^{ième}$ nombre premier impair,

$$\begin{array}{ll} \sigma_{1,i} = \sigma_{1,i-1} & +p_i \\ \sigma_{2,i} = \sigma_{2,i-1} & +\sigma_{1,i-1}.p_i \\ \sigma_{3,i} = \sigma_{3,i-1} & +\sigma_{2,i-1}.p_i \\ \vdots & \\ \sigma_{i-1,i} = \sigma_{i-1,i-1} & +\sigma_{i-2,i-1}.p_i \\ \sigma_{i,i} = & +\sigma_{i-1,i-1}.p_i \end{array}$$

5 Pgcd des polynomes

Dans la mesure où l'on cherche une racine r qui vérifie et la première et la deuxième équation, le fait que les deux polynômes en question aient un pgcd différent de 1 assurerait l'existence d'une telle racine.

Avec l'outil libre Sage, on expérimente cette idée à la recherche des décomposants de Goldbach de 14.

$Sage : decomp14 = var('x')$
$Sage : eq1 = x^5 - 39 * x^4 + 574 * x^3 - 3954 * x^2 + 12673 * x - 15015$
$Sage : eq2 = -x^5 + 31 * x^4 - 350 * x^3 + 1730 * x^2 - 3489 * x + 2079$
$Sage : eq1.gcd(eq2)$
$Sage :\ x^3 - 21 * x^2 + 131 * x - 231$
$Sage : eq4 = x^3 - 21 * x^2 + 131 * x - 231 == 0$
$Sage : solve([eq4], x)$
$Sage :\ [x == 7, x == 11, x == 3]$

En annexe, sont fournis par Sage les polynômes *pgcd* jusqu'au degré 6.

6 Poursuivons

On a bien compris que le coefficient important (directeur en quelque sorte), c'est le deuxième coefficient du second polynôme, car il fournit la somme des complémentaires à n des nombres premiers inférieurs à n et que la somme en question doit être représentable par une partition de $\pi(n) - 1$ entiers impairs compris entre 1 et $n - 3$, cette partition contenant un nombre premier au moins.

Par exemple, pour $n = 14$, le deuxième coefficient du deuxième polynôme est 31. Ce nombre 31 est la somme des complémentaires des nombres premiers impairs inférieurs à 14 que sont $3, 5, 7, 11$ et 13 : $31 = 1 + 3 + 7 + 9 + 11$.

Voyons comment ce 31 est "advenu" par nos coefficients de Taylor successifs.

6.1 Comprenons sur le cas du nombre pair 14

Dans la suite, on n'effectuera pas les calculs, laissant au fur et à mesure apparaître les premiers entiers qui s'élimineront entre eux.

Le premier polynôme à dériver est : $P(x) = x^5 - 39x^4 + 574x^3 - 3954x^2 + 12673x - 15015$

Il se dérive en : $P'(x) = -5x^4 + (4 \times 39)x^3 - (3 \times 574)x^2 + (2 \times 3954)x - 12673$

Puis,

$$\frac{P''(x)}{2} = \left(\frac{5 \times 4}{2}\right) x^3 - \left(\frac{3 \times 4 \times 39}{2}\right) x^2 + \left(\frac{2 \times 3 \times 574}{2}\right) x + \left(\frac{2 \times 3954}{2}\right)$$

Encore,

$$\frac{P'''(x)}{2 \times 3} = -\left(\frac{3 \times 4 \times 5}{2 \times 3}\right) x^2 + \left(\frac{2 \times 3 \times 4 \times 39}{2 \times 3}\right) x + \left(\frac{2 \times 3 \times 574}{2 \times 3}\right)$$

Enfin,

$$\frac{P''''(x)}{2 \times 3 \times 4} = \left(\frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{2 \times 3 \times 4}\right) x - \left(\frac{2 \times 3 \times 4 \times 39}{2 \times 3 \times 4}\right)$$

Si l'on ne se préoccupe que de la plus haute puissance de x, on a :

$$x^5 \to -5x^4 \to \left(\frac{4 \times 5}{2}\right) x^3 \to -\left(\frac{3 \times 4 \times 5}{2 \times 3}\right) x^2 \to \left(\frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{2 \times 3 \times 4}\right) x$$

Remplaçons x par 14 dans la dernière expression, ce qui nous donne $5 \times 14 = 70$.

Soustrayons de 70 le σ_1 du premier polynôme $39 = 3 + 5 + 7 + 11 + 13$, on obtient 31.
Ce nombre 31 est une somme d'impairs compris entre 1 et $n - 3 = 11$. En l'occurrence, 31 est la somme $1 + 3 + 7 + 9 + 11$. Il y a plusieurs nombres premiers dans cette somme qui sont autant de décomposants de Goldbach de 14.

6.2 Réappliquons pour le nombre pair 16

Réappliquons la méthode pour le nombre pair 16. Soustrayons de $16 \times 5 = 80$ le même nombre 39 somme des premiers impairs inférieurs à 16. On obtient 41, une somme d'impairs compris entre 1 et 13. La somme en question est $13 + 11 + 9 + 5 + 3$ qui contient les décomposants de Goldbach de 16.

6.3 Résumons avec 18

Notons $\sigma_1(n)$ la somme des nombres premiers impairs inférieurs à $n-1$. En réexpérimentant une dernière fois pour 18, on comprend que prouver la conjecture de Goldbach consiste à prouver que le nombre $n(\pi(n)-1) - \sigma_1(n)$ peut toujours être partitionné en une somme de $\pi(n) - 1$ nombres impairs compris entre 1 et $n-3$ avec l'un des nombres de la partition en question qui est un nombre premier, et de fait un décomposant de Goldbach de n.

7 Démonstration par récurrence

On fournit ici ce qui se passe pour les premiers nombres pairs à des fins pédagogiques.

n	*décomp. de la forme* p+q *avec* p *premier impair*	m ($2^{\text{ème}}$ *coeff. du* $2^{\text{ème}}$ *polynôme*)	$f(n) = (\pi(n)-1)n - \sigma_1(n)$
6	$3+3, 5+1$	$1+3=4$	$2 \times 6 - 8 = 4$
8	$3+5, 5+3, 7+1$	$1+3+5=9$	$3 \times 8 - 15 = 9$
10	$3+7, 5+5, 7+3$	$3+5+7=15$	$3 \times 10 - 15 = 15$
12	$3+9, 5+7, 7+5, 11+1$	$1+5+7+9=22$	$4 \times 12 - 26 = 22$
14	$3+11, 5+9, 7+7, 11+3, 13+1$	$1+3+7+9+11=31$	$5 \times 14 - 39 = 31$
16	$3+13, 5+11, 7+9, 11+5, 13+3$	$3+5+9+11+13=41$	$5 \times 16 - 39 = 41$
18	$3+15, 5+13, 7+11, 11+7, 13+5, 17+1$	$1+5+7+11+13+15$	$6 \times 18 - 56 = 52$
20	$3+17, 5+15, 7+13, 11+9, 13+7, 17+3, 19+1$	$1+3+7+9+13+15+17=65$	$7 \times 20 - 75 = 65$
22	$3+19, 5+17, 7+15, 11+11, 13+9, 17+5, 19+3$	$3+5+9+11+15+17+19=79$	$7 \times 22 - 75 = 79$
...	...	...	...

On rappelle que $f(n) = \sum_1^{\pi(n)-1} k_i$ est la somme des nombres impairs k_i tels que $n = p_i + k_i$ avec p_i un nombre premier impair compris entre 3 et n.

On voit par le calcul ci-dessous que la différence séparant deux nombres $f(n)$ à partitionner successifs vaut $2(\pi(n)-1)$ si $n-1$ n'est pas un nombre premier et $2\pi(n)-1$ si $n-1$ est un nombre premier.

S'il n'y a pas de nombre premier entre n et $n+2$,

$$\begin{aligned}
\pi(n+2) &= \pi(n) \\
\sigma_1(n+2) &= \sigma_1(n) \\
f(n+2) &= (\pi(n+2)-1)(n+2) - \sigma_1(n+2) \\
&= \pi(n)(n+2) - (n+2) - \sigma_1(n) \\
&= \pi(n)n + 2\pi(n) - (n+2) - \sigma_1(n) \\
f(n) &= (\pi(n)-1)n - \sigma_1(n) \\
f(n+2) - f(n) &= [\pi(n)n - \sigma_1(n) + 2\pi(n) - (n+2)] - [\pi(n)n - n - \sigma_1(n)] \\
&= 2\pi(n) - 2 \\
&= 2(\pi(n)-1)
\end{aligned}$$

S'il y a un nombre premier entre n et $n+2$, qui n'est autre que $n+1$,

$$\begin{aligned}
\pi(n+2) &= \pi(n)+1.\\
\sigma_1(n+2) &= \sigma_1(n)+p_{\pi(n)-1}\\
&= \sigma_1(n)+n+1.\\
f(n+2) &= (\pi(n+2)-1)(n+2)-\sigma_1(n+2)\\
&= \pi(n)(n+2)-\sigma_1(n)-n-1\\
&= \pi(n)n-\sigma_1(n)+2\pi(n)-n-1.\\
f(n) &= (\pi(n)-1)n-\sigma_1(n)\\
&= \pi(n)n-n-\sigma_1(n)\\
f(n+2)-f(n) &= [\pi(n)n+2\pi(n)-\sigma_1(n)-n-1]-[\pi(n)n-n-\sigma_1(n)]\\
&= 2\pi(n)-1
\end{aligned}$$

On va démontrer par récurrence que s'il existe une partition du coefficient $f(n)$ associé à n en $d=\pi(n)-1$ nombres impairs différents dont l'un est un nombre premier, alors il existe une partition du coefficient $f(n+2)$ associé à $n'=n+2$ en $d'=\pi(n')-1=\pi(n+2)-1$ nombres impairs différents dont l'un est un nombre premier :
- *initialisation de la récurrence* : il existe une partition du nombre 4 en 2 nombres impairs dont l'un des deux est premier ;
- *passage du nombre pair n au nombre pair suivant $n+2$:* supposons la conjecture de Goldbach vérifiée jusqu'à n, il existe une partition de $(\pi(n)-1)n-\sigma_1(n)$ en $\pi(n)-1$ nombres impairs différents dont l'un au moins est premier.
Ecrivons la partition de $f(n)$: $f(n)=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\pi(n)-1}$ dans laquelle les α_i sont indifféremment des nombres impairs premiers ou composés.
Pour trouver $f(n+2)$ le nombre à partitionner correspondant à $n+2$, on a vu qu'il faut distinguer deux cas :

- soit $n+1$ n'est pas premier ; pour obtenir $f(n+2)$, on doit alors ajouter à $f(n)$ le nombre $2(\pi(n)-1)$. On peut écrire :

  $$f(n+2)=f(n)+2(\pi(n)-1)=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\pi(n)-1}+q_1+q_2$$

  avec q_1 et q_2 deux nombres premiers impairs, puisque la conjecture de Goldbach est en particulier vérifiée pour le nombre pair $2(\pi(n)-1)$ car il est inférieur à n (de l'ordre de $\frac{n}{ln(n)}$ selon le théorème des nombres premiers d'Hadamard)*.
  Mais on peut aussi écrire :

  $$f(n+2)=change(f(n))=(\alpha_1+2)+(\alpha_2+2)+\ldots+(\alpha_{\pi(n)-1}+2)$$

  ~~On a ajouté 2 sommants à la partition de $f(n)$: q_1 et q_2. Or la partition de $f(n+2)$ doit contenir autant de sommants que celle de $f(n)$. Il faut éliminer deux signes +. L'élimination des deux signes + doit se faire en regroupant 3 nombres en un seul, pour préserver l'imparité des sommants de la partition. Ce regroupement de 3 nombres de la partition de $f(n)$ ne peut faire disparaître simultanément les 3 nombres premiers impairs qui étaient présents (p_1, q_1 et q_2) dans la partition de $f(n)$. Il reste un nombre premier au moins dans la partition de $f(n+2)$ qui est un décomposant de Goldbach de $n+2$.~~

- soit $n+1$ est premier ; on doit alors ajouter à $f(n)$ le nombre $2\pi(n)-1$. On peut écrire :

  $$f(n+2)=f(n)+2\pi(n)-1=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\pi(n)-1}+q_1+q_2+(-1)$$

  avec p_1, q_1 et q_2 trois nombres premiers impairs, puisque la conjecture de Goldbach est en particulier vérifiée pour le nombre pair $2\pi(n)$ car il est inférieur à n (de l'ordre de $\frac{n}{ln(n)}$ selon le théorème des nombres premiers d'Hadamard), et les α_i des nombres impairs indifféremment premiers ou composés.
  Mais on peut aussi écrire :

  $$f(n+2)=change(f(n))=1+(\alpha_1+2)+(\alpha_2+2)+\ldots+(\alpha_{\pi(n)-1}+2)$$

*1 appartient à la partition de $f(n)$ tandis qu'il n'appartient pas à celle de $f(n+2)$ et les deux partitions de $f(n)$ et $f(n+2)$ ont en commun les deux plus grands nombres de la partition de $f(n)$.

~~On a ajouté 3 sommants à la partition de $f(n)$: q_1, q_2 et -1. Or la partition de $f(n+2)$ contient seulement un sommant de plus que celle de $f(n)$. Il faut éliminer là-encore deux signes $+$. Le nombre -1 doit forcément faire partie d'un regroupement de 3 nombres car d'une part, il doit disparaître dans la mesure où la partition de $f(n+2)$ ne doit contenir que des nombres impairs positifs, et d'autre part, il est nécessaire de le regrouper avec 2 autres nombres impairs pour que la somme obtenue soit comme tous les autres sommants un nombre impair positif. Le regroupement de -1 avec deux autres nombres de la partition de $f(n)$ ne peut faire disparaître simultanément les 3 nombres premiers qui étaient présents (p_1, q_1 et q_2). Il reste un nombre premier au moins dans la partition de $f(n+2)$ qui est un décomposant de Goldbach de $n+2$.~~

Bibliographie

[1], **Evariste Galois**, *Sur la théorie des nombres*, Bulletin des Sciences mathématiques de M. Férussac, tome XIII, page 428, juin 1830. Note de J. Liouville : ce mémoire fait partie des recherches de M. Galois sur la théorie des permutations et des équations algébriques.

[2], **Guillaume Libri**, *Mémoire sur la théorie des nombres*, in *Mémoires de mathématiques*, extraits du *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, publié par A.L. Crelle, Berlin, 1835, p.44.

[3], **Léonard Euler**, *Démonstration sur le nombre de points où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper*, Mémoires de l'Académie des Sciences et belles lettres de Berlin [4], Berlin, 1750, p.234-248.

[4], **Léonard Euler**, *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations*, Mémoires de l'Académie des Sciences et belles lettres de Berlin [20], Berlin, 1764, p.91-104.

Annexe 1 : exemples des degrés 2 à 6

Si on résoud les équations dont on a calculé les coefficients en remplaçant n successivement par les valeurs 12 (équations de degré 4 car il y a 4 nombres premiers impairs inférieurs à 12 qui sont $3, 5, 7$ et 11) puis par les valeurs 14 et 16 pour n (équations polynomiales de degré 5 car on a rajouté le nombre premier impair 13), et enfin 18 (degré 6) avec un outil tel que l'outil libre Sage qui permet la résolution d'équations polynomiales, on arrive à résoudre les systèmes ci-dessous.

Pour $n = 12$, il faut résoudre le système :

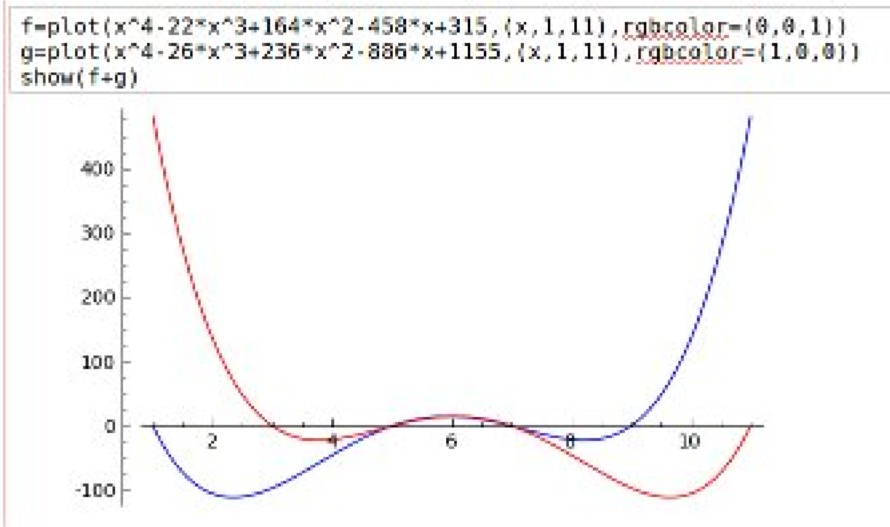
$$\begin{cases} x^4 - 26x^3 + 236x^2 - 886x + 1155 = 0 \\ x^4 + (26-4n)x^3 + (6n^2 - 78n + 236)x^2 + (-4n^3 + 78n^2 - 472n + 886)x + (n^4 - 26n^3 + 236n^2 - 886n + 1155) = 0 \end{cases}$$

qui se ramène au système :

$$\begin{cases} x^4 - 26x^3 + 236x^2 - 886x + 1155 = 0 \\ x^4 - 22x^3 + 164x^2 - 458x + 315 = 0 \end{cases}$$

Les seules valeurs de x qui conviennent sont bien 5 et 7 qui sont bien les décomposants de Goldbach de 12.

La visualisation des deux polynômes par l'outil libre Sage est fournie ci-dessous :



Calculons les équations pour le degré 5 (nombres premiers impairs 3, 5, 7, 11 et 13).

$$x^5 - 39x^4 + 574x^3 - 3954x^2 + 12673x - 10725 = 0$$

avec

$3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 39$
$3.5 + 3.7 + 3.11 + 3.13 + 5.7 + 5.11 + 5.13 + 7.11 + 7.13 + 11.13 = 574$
$3.5.7 + 3.5.11 + 3.5.13 + 3.7.11 + 3.7.13 + 3.11.13 + 5.7.11 + 5.7.13 + 5.11.13 + 7.11.13 = 3954$
$3.5.7.11 + 3.5.7.13 + 3.5.11.13 + 3.7.11.13 + 5.7.11.13 = 12673$
$3.5.7.11.13 = 15015.$

En remplaçant x par $n-x$, on obtient le polynôme suivant dont on cherche quelles valeurs de x l'annulent.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & & & & -x^5 \\
 & & & & +(5n & -39) & x^4 \\
 & & & +(-10n^2 & +156n & -574) & x^3 \\
 & & +(10n^3 & -234n^2 & +1722n & -3954) & x^2 \\
 & +(-5n^4 & +156n^3 & -1722n^2 & +7908n & -12673) & x^1 \\
+(n^5 & -39n^4 & +574n^3 & -3954n^2 & +12673n & -15015) &
\end{array}$$

Pour $n = 14$ ou $n = 16$, il faut résoudre le système :

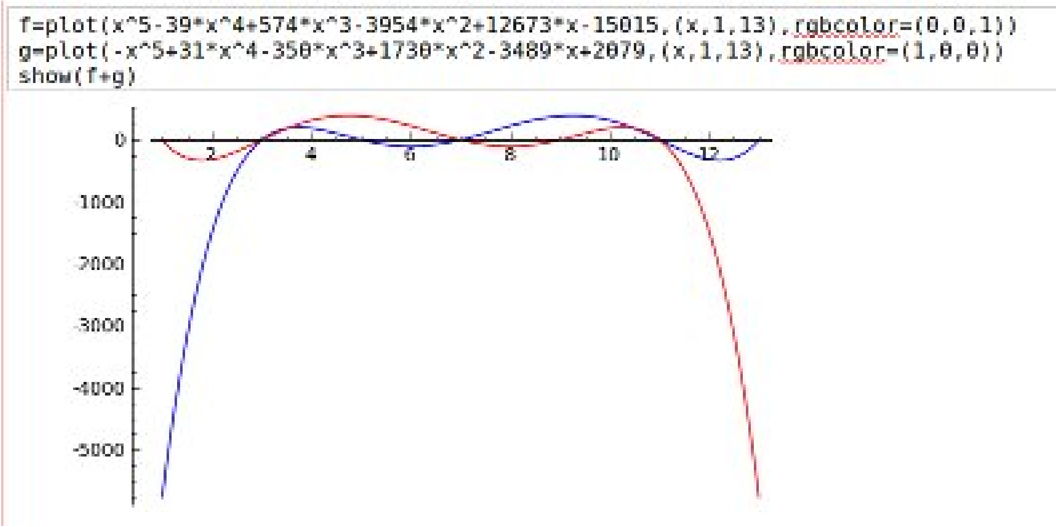
$$\left\{\begin{array}{l}
x^5 - 39x^4 + 574x^3 - 3954x^2 + 12673x - 15015 = 0 \\
-x^5 + (5n-39)x^4 + (-10n^2 + 156n - 574)x^3 + (10n^3 - 234n^2 + 1722n - 3954)x^2 + \\
\qquad (-5n^4 + 156n^3 - 1722n^2 + 7908n - 12673)x + (n^5 - 39n^4 + 574n^3 - 3954n^2 + 12673n - 15015) = 0
\end{array}\right.$$

qui se ramène dans le cas de $n = 14$ au système :

$$\left\{\begin{array}{l}
x^5 - 39x^4 + 574x^3 - 3954x^2 + 12673x - 15015 = 0 \\
-x^5 + 31x^4 - 350x^3 + 1730x^2 - 3489x + 2079 = 0
\end{array}\right.$$

Les seules valeurs de x qui conviennent sont $3, 7$ et 11, qui sont bien les décomposants de Goldbach de 14.

La visualisation des deux polynômes par l'outil libre Sage est fournie ci-dessous :

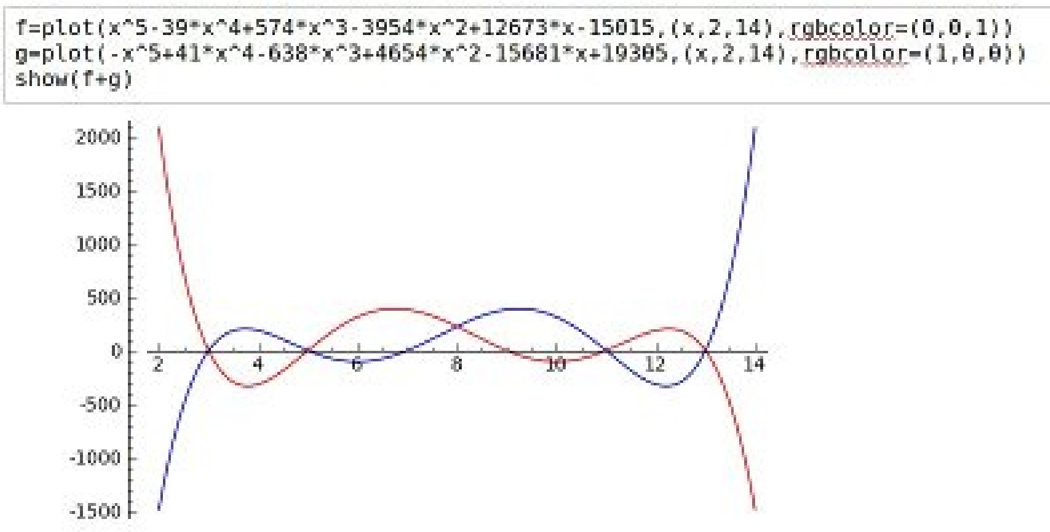


Pour $n = 16$, le système final à résoudre est :

$$\begin{cases} x^5 - 39x^4 + 574x^3 - 3954x^2 + 12673x - 15015 = 0 \\ -x^5 + 41x^4 - 638x^3 + 4654x^2 + 15681x - 19305 = 0 \end{cases}$$

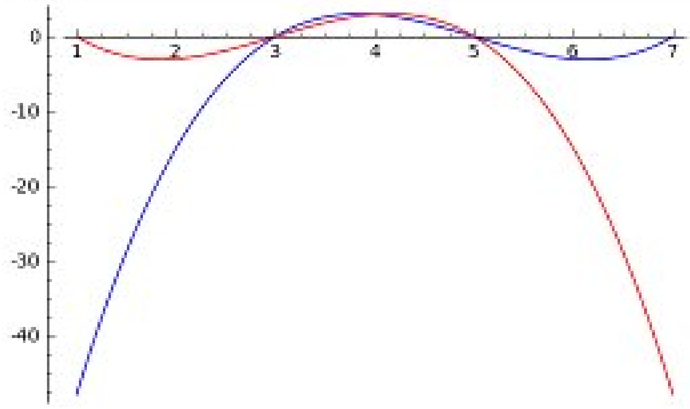
Le pgcd de ces deux polynômes est $x^4 - 32x^3 + 350x^2 - 1504x + 2145$. Les seules valeurs de x qui conviennent sont $3, 5, 11$ et 13, qui sont bien les décomposants de Goldbach de 16.

La visualisation des deux polynômes par l'outil libre Sage est fournie ci-dessous :

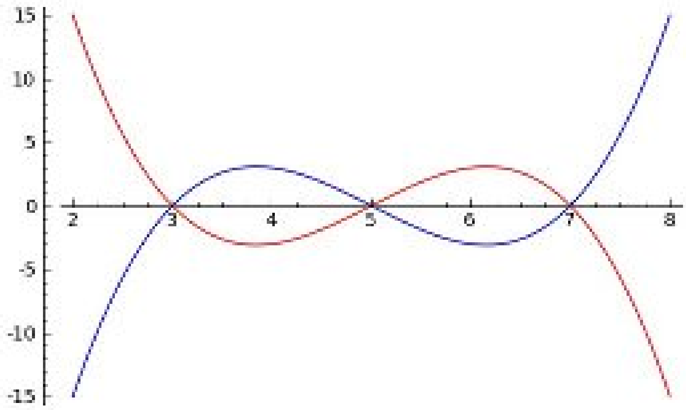


Fournissons enfin les visualisations par l'outil libre Sage des polynômes permettant de trouver les décomposants de Goldbach des nombres pairs 6, 8, 10 et 18.

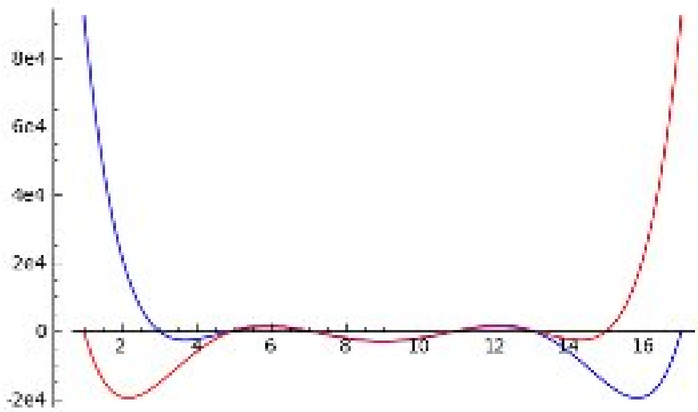
```
f=plot(x^3-15*x^2+71*x-105,(x,1,7),rgbcolor=(0,0,1))
g=plot(-x^3+9*x^2-23*x+15,(x,1,7),rgbcolor=(1,0,0))
show(f+g)
```




```
f=plot(x^3-15*x^2+71*x-105,(x,2,8),rgbcolor=(0,0,1))
g=plot(-x^3+15*x^2-71*x+105,(x,2,8),rgbcolor=(1,0,0))
show(f+g)
```




```
f=plot(x^6-56*x^5+1237*x^4-13712*x^3+79891*x^2-230456*x+255255,(x,1,17),rgbcolor=(0,0,1))
g=plot(x^6-52*x^5+1057*x^4-10552*x^3+52891*x^2-118420*x+75075,(x,1,17),rgbcolor=(1,0,0))
show(f+g)
```



Ci-dessous la copie d'écran du calcul des *pgcd* par Sage (on rappelle que les racines du *pgcd* des deux polynômes de variable x et $n-x$ sont les décomposants de Goldbach de n) :

```
p=x^2-8*x+15
q=p.substitute(x=6-x).expand()
q.gcd(p)
    x - 3

p=x^3-15*x^2+71*x-105
q=p.substitute(x=8-x).expand()
q.gcd(p)
    x^2 - 8*x + 15

p=x^3-15*x^2+71*x-105
q=p.substitute(x=10-x).expand()
q.gcd(p)
    x^3 - 15*x^2 + 71*x - 105

p=x^4-22*x^3+164*x^2-458*x+315
q=p.substitute(x=12-x).expand()
q.gcd(p)
    x^2 - 12*x + 35

p=x^5-39*x^4+574*x^3-3954*x^2+12673*x-15015
q=p.substitute(x=14-x).expand()
q.gcd(p)
    x^3 - 21*x^2 + 131*x - 231

p=x^5-39*x^4+574*x^3-3954*x^2+12673*x-15015
q=p.substitute(x=16-x).expand()
q.gcd(p)
    x^4 - 32*x^3 + 350*x^2 - 1504*x + 2145

p=x^6-56*x^5+1237*x^4-13712*x^3+79891*x^2-230456*x+255255
q=p.substitute(x=18-x).expand()
q.gcd(p)
    x^4 - 36*x^3 + 466*x^2 - 2556*x + 5005
```

Annexe 2 : complémentaires des nombres premiers impairs inférieurs à n pour n compris entre 8 et 100

Il faut démontrer le théorème suivant : *"Si la suite $i_1, i_2, \ldots, i_{\pi(n)-1}$ de $\pi(n)-1$ nombres impairs différents, compris entre 1 et $n-3$ contient un nombre premier alors la suite $i_1+2, i_2+2, \ldots, i_k+2$ contient elle-aussi un nombre premier.*

Le nombre d'impairs compris entre 1 et $n-3$ est $\frac{n-2}{2}$.

$n =$	8
$\pi(n) - 1 =$	3
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	3
$p(f(n)) =$	$1 + 3 + 5$
$f(n) =$	9

$n =$	10
$\pi(n) - 1 =$	3
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	4
$p(f(n)) =$	$3 + 5 + 7$
$f(n) =$	15

$n =$	12
$\pi(n) - 1 =$	4
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	5
$p(f(n)) =$	$1 + 5 + 7 + 9$
$f(n) =$	22

$n =$	14
$\pi(n) - 1 =$	5
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	6
$p(f(n)) =$	$1 + 3 + 7 + 9 + 11$
$f(n) =$	31

$n =$	16
$\pi(n) - 1 =$	5
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	7
$p(f(n)) =$	$3 + 5 + 9 + 11 + 13$
$f(n) =$	41

$n =$	18
$\pi(n) - 1 =$	6
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	8
$p(f(n)) =$	$1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 15$
$f(n) =$	52

$n =$	20
$\pi(n) - 1 =$	7
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	9
$p(f(n)) =$	$1 + 3 + 7 + 9 + 13 + 15 + 17$
$f(n) =$	65

$n =$	22
$\pi(n) - 1 =$	7
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	10
$p(f(n)) =$	$3 + 5 + 9 + 11 + 15 + 17 + 19$
$f(n) =$	79

$n =$	24
$\pi(n) - 1 =$	8
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	11
$p(f(n)) =$	$1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 21$
$f(n) =$	94

$n =$	26
$\pi(n) - 1 =$	8
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	12
$p(f(n)) =$	$3 + 7 + 9 + 13 + 15 + 19 + 21 + 23$
$f(n) =$	110

$n =$ 28
$\pi(n) - 1 =$ 8
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre\ 1\ et$ n-3 : 13
$p(f(n)) =$ $5 + 9 + 11 + 15 + 17 + 21 + 23 + 25$
$f(n) =$ 126

$n =$ 30
$\pi(n) - 1 =$ 9
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre\ 1\ et$ n-3 : 14
$p(f(n)) =$ $1 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 25 + 27$
$f(n) =$ 143

$n =$ 32
$\pi(n) - 1 =$ 10
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre\ 1\ et$ n-3 : 15
$p(f(n)) =$ $1 + 3 + 9 + 13 + 15 + 19 + 21 + 25 + 27 + 29$
$f(n) =$ 162

$n =$ 34
$\pi(n) - 1 =$ 10
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre\ 1\ et$ n-3 : 16
$p(f(n)) =$ $3 + 5 + 11 + 15 + 17 + 21 + 23 + 27 + 29 + 31$
$f(n) =$ 182

$n =$ 36
$\pi(n) - 1 =$ 10
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre\ 1\ et$ n-3 : 17
$p(f(n)) =$ $5 + 7 + 13 + 17 + 19 + 23 + 25 + 29 + 31 + 33$
$f(n) =$ 202

$n =$ 38
$\pi(n) - 1 =$ 11
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre\ 1\ et$ n-3 : 18
$p(f(n)) =$ $1 + 7 + 9 + 15 + 19 + 21 + 25 + 27 + 31 + 33 + 35$
$f(n) =$ 223

$n =$ 40
$\pi(n) - 1 =$ 11
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre\ 1\ et$ n-3 : 19
$p(f(n)) =$ $3 + 9 + 11 + 17 + 21 + 23 + 27 + 29 + 33 + 35 + 37$
$f(n) =$ 245

$n =$ 42
$\pi(n) - 1 =$ 12
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre\ 1\ et$ n-3 : 20
$p(f(n)) =$ $1 + 5 + 11 + 13 + 19 + 23 + 25 + 29 + 31 + 35 + 37 + 39$
$f(n) =$ 268

$n =$ 44
$\pi(n) - 1 =$ 13
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre\ 1\ et$ n-3 : 21
$p(f(n)) =$ $1 + 3 + 7 + 13 + 15 + 21 + 25 + 27 + 31 + 33 + 37 + 39 + 41$
$f(n) =$ 293

$n =$ 46
$\pi(n) - 1 =$ 13
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre\ 1\ et$ n-3 : 22
$p(f(n)) =$ $3 + 5 + 9 + 15 + 17 + 23 + 27 + 29 + 33 + 35 + 39 + 41 + 43$
$f(n) =$ 319

$n =$	48
$\pi(n) - 1 =$	14
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	23
$p(f(n)) =$	$1 + 5 + 7 + 11 + 17 + 19 + 25 + 29 + 31 + 35 + 37 + 41 + 43 + 45$
$f(n) =$	346
$n =$	50
$\pi(n) - 1 =$	14
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	24
$p(f(n)) =$	$3 + 7 + 9 + 13 + 19 + 21 + 27 + 31 + 33 + 37 + 39 + 43 + 45 + 47$
$f(n) =$	374
$n =$	52
$\pi(n) - 1 =$	14
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	25
$p(f(n)) =$	$5 + 9 + 11 + 15 + 21 + 23 + 29 + 33 + 35 + 39 + 41 + 45 + 47 + 49$
$f(n) =$	402
$n =$	54
$\pi(n) - 1 =$	15
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	26
$p(f(n)) =$	$1 + 7 + 11 + 13 + 17 + 23 + 25 + 31 + 35 + 37 + 41 + 43 + 47 + 49 + 51$
$f(n) =$	431
$n =$	56
$\pi(n) - 1 =$	15
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	27
$p(f(n)) =$	$3 + 9 + 13 + 15 + 19 + 25 + 27 + 33 + 37 + 39 + 43 + 45 + 49 + 51 + 53$
$f(n) =$	461
$n =$	58
$\pi(n) - 1 =$	15
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	28
$p(f(n)) =$	$5 + 11 + 15 + 17 + 21 + 27 + 29 + 35 + 39 + 41 + 45 + 47 + 51 + 53 + 55$
$f(n) =$	491
$n =$	60
$\pi(n) - 1 =$	16
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	29
$p(f(n)) =$	$1 + 7 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 + 47 + 49 + 53 + 55$ $+57$
$f(n) =$	522
$n =$	62
$\pi(n) - 1 =$	17
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	30
$p(f(n)) =$	$1 + 3 + 9 + 15 + 19 + 21 + 25 + 31 + 33 + 39 + 43 + 45 + 49 + 51 + 55$ $+57 + 59$
$f(n) =$	555
$n =$	64
$\pi(n) - 1 =$	17
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	31
$p(f(n)) =$	$3 + 5 + 11 + 17 + 21 + 23 + 27 + 33 + 35 + 41 + 45 + 47 + 51 + 53$ $+57 + 59 + 61$
$f(n) =$	589

$n =$ 66
$\pi(n) - 1 =$ 17
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre$ 1 et n-3 : 32
$p(f(n)) =$ $5 + 7 + 13 + 19 + 23 + 25 + 29 + 35 + 37 + 43 + 47 + 49 + 53 + 55$
$+59 + 61 + 63$
$f(n) =$ 623

$n =$ 68
$\pi(n) - 1 =$ 18
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre$ 1 et n-3 : 33
$p(f(n)) =$ $1 + 7 + 9 + 15 + 21 + 25 + 27 + 31 + 37 + 39 + 45 + 49 + 51 + 55$
$+57 + 61 + 63 + 65$
$f(n) =$ 658

$n =$ 70
$\pi(n) - 1 =$ 18
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre$ 1 et n-3 : 34
$p(f(n)) =$ $3 + 9 + 11 + 17 + 23 + 27 + 29 + 33 + 39 + 41 + 47 + 51 + 53 + 57$
$+59 + 63 + 65 + 67$
$f(n) =$ 694

$n =$ 72
$\pi(n) - 1 =$ 19
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre$ 1 et n-3 : 35
$p(f(n)) =$ $1 + 5 + 11 + 13 + 19 + 25 + 29 + 31 + 35 + 41 + 43 + 49 + 53 + 55$
$+59 + 61 + 65 + 67 + 69$
$f(n) =$ 731

$n =$ 74
$\pi(n) - 1 =$ 20
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre$ 1 et n-3 : 36
$p(f(n)) =$ $1 + 3 + 7 + 13 + 15 + 21 + 27 + 31 + 33 + 37 + 43 + 45 + 51 + 55$
$+57 + 61 + 63 + 67 + 69 + 71$
$f(n) =$ 770

$n =$ 76
$\pi(n) - 1 =$ 20
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre$ 1 et n-3 : 37
$p(f(n)) =$ $3 + 5 + 9 + 15 + 17 + 23 + 29 + 33 + 35 + 39 + 45 + 47 + 53 + 57$
$+59 + 63 + 65 + 69 + 71 + 73$
$f(n) =$ 810

$n =$ 78
$\pi(n) - 1 =$ 20
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre$ 1 et n-3 : 38
$p(f(n)) =$ $5 + 7 + 11 + 17 + 19 + 25 + 31 + 35 + 37 + 41 + 47 + 49 + 55 + 59$
$+61 + 65 + 67 + 71 + 73 + 75$
$f(n) =$ 850

$n =$ 80
$\pi(n) - 1 =$ 21
$nombre\ d'impairs\ compris\ entre$ 1 et n-3 : 39
$p(f(n)) =$ $1 + 7 + 9 + 13 + 19 + 21 + 27 + 33 + 37 + 39 + 43 + 49 + 51 + 57$
$+61 + 63 + 67 + 69 + 73 + 75 + 77$
$f(n) =$ 891

$n =$ 82
$\pi(n) - 1 =$ 21
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 : 40
$p(f(n)) =$ $3 + 9 + 11 + 15 + 21 + 23 + 29 + 35 + 39 + 41 + 45 + 51 + 53$
$+59 + 63 + 65 + 69 + 71 + 75 + 77 + 79$
$f(n) =$ 933

$n =$ 84
$\pi(n) - 1 =$ 22
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 : 41
$p(f(n)) =$ $1 + 5 + 11 + 13 + 17 + 23 + 25 + 31 + 37 + 41 + 43 + 47 + 53$
$+55 + 61 + 65 + 67 + 71 + 73 + 77 + 79 + 81$
$f(n) =$ 976

$n =$ 86
$\pi(n) - 1 =$ 22
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 : 42
$p(f(n)) =$ $3 + 7 + 13 + 15 + 19 + 25 + 27 + 33 + 39 + 43 + 45 + 49 + 55$
$+57 + 63 + 67 + 69 + 73 + 75 + 79 + 81 + 83$
$f(n) = 1020$

$n =$ 88
$\pi(n) - 1 =$ 22
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 : 43
$p(f(n)) =$ $5 + 9 + 15 + 17 + 21 + 27 + 29 + 35 + 41 + 45 + 47 + 51 + 57$
$+59 + 65 + 69 + 71 + 75 + 77 + 81 + 83 + 85$
$f(n) =$ 1064

$n =$ 90
$\pi(n) - 1 =$ 23
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 : 44
$p(f(n)) =$ $1 + 7 + 11 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 43 + 47 + 49 + 53$
$+59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 77 + 79 + 83 + 85 + 87$
$f(n) =$ 1109

$n =$ 92
$\pi(n) - 1 =$ 23
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 : 45
$p(f(n)) =$ $3 + 9 + 13 + 19 + 21 + 25 + 31 + 33 + 39 + 45 + 49 + 51 + 55$
$+61 + 63 + 69 + 73 + 75 + 79 + 81 + 85 + 87 + 89$
$f(n) =$ 1155

$n =$ 94
$\pi(n) - 1 =$ 23
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 : 46
$p(f(n)) =$ $5 + 11 + 15 + 21 + 23 + 27 + 33 + 35 + 41 + 47 + 51 + 53 + 57$
$+63 + 65 + 71 + 75 + 77 + 81 + 83 + 87 + 89 + 91$
$f(n) =$ 1201

$n =$ 96
$\pi(n) - 1 =$ 23
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 : 47
$p(f(n)) =$ $7 + 13 + 17 + 23 + 25 + 29 + 35 + 37 + 43 + 49 + 53 + 55 + 59$
$+65 + 67 + 73 + 77 + 79 + 83 + 85 + 89 + 91 + 93$
$f(n) =$ 1247

$n =$	98
$\pi(n) - 1 =$	24
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	48
$p(f(n)) =$	$1 + 9 + 15 + 19 + 25 + 27 + 31 + 37 + 39 + 45 + 51 + 55 + 57$
	$+61 + 67 + 69 + 75 + 79 + 81 + 85 + 87 + 91 + 93 + 95$
$f(n) =$	1294

$n =$	100
$\pi(n) - 1 =$	24
nombre d'impairs compris entre 1 *et* n-3 :	49
$p(f(n)) =$	$3 + 11 + 17 + 21 + 27 + 29 + 33 + 39 + 41 + 47 + 53 + 57 + 59$
	$+63 + 69 + 71 + 77 + 81 + 83 + 87 + 89 + 93 + 95 + 97$
$f(n) =$	1342

Annexe 3 : trouver des éléments par rapport au $3^{ème}$ coefficient de la deuxième équation

Le troisième coefficient représente la somme des produits de 2 nombres premiers parmi ceux considérés.

Quand on passe de n à $n + 2$, on ajoute 2 à chaque racine de la $2^{ème}$ équation et on ne change pas de nombre de racines (de degré) si $n + 1$ n'est pas premier tandis qu'on ajoute la racine 1 si $n + 1$ est premier (1 devient complémentaire à n d'un nombre premier et est donc racine de la seconde équation qui recense tous les complémentaires à n de premiers impairs).

Donnons un exemple : passons de $p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3$ à $(p_1 + 2)(p_2 + 2) + (p_1 + 2)(p_3 + 2) + (p_2 + 2)(p_3 + 2)$. On voit qu'on passe du $3^{ème}$ coefficient de la deuxième équation associée n à celui de la deuxième équation associée à $n + 2$ en effectuant le calcul suivant si $n + 1$ n'est pas premier :

$$g(n + 2) = g(n) + 4\sigma_1(n) + 4(\pi(n) - 1)$$

On doit faire le calcul suivant si $n + 1$ est premier :

$$g(n + 2) = g(n) + 4\sigma_1(n) + 4(\pi(n) - 1) + \sigma_1(n + 2).$$

Tous ces calculs sont beaucoup trop laborieux pour que l'on puisse les mener à bien. Cependant, un théorème exprime que toute fonction rationnelle des lettres a, b, c, etc, invariante par permutation de ces lettres s'exprime en fonction des fonctions symétriques de ces lettres. En raison des relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme, on en déduit que toute fonction rationnelle des racines d'une équation s'exprime rationnellement en fonction des coefficients de cette équation. Les solutions de la deuxième équation sont donc calculables et si on connaissait la façon de calculer ces racines, on arriverait peut-être à prouver que l'une de ces solutions est un nombre premier.