Un lien entre la conjecture de Goldbach et le totient d'Euler

Denise Vella

Janvier 2006

1 Enoncé de la conjecture de Goldbach

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre entier supérieur à 2 soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*[1].

2 Calculs utiles

On constate d'abord que les décompositions Goldbach d'un nombre pair $2x$ se lisent toutes simultanément dans un tableau construit de la sorte :

$2x$	$2x-1$	$2x-2$	$2x-3$	...	...	2	1
0	1	2	3	...	...	$2x-2$	$2x-1$

Le tableau est construit de telle façon que la somme des contenus des deux cases de chaque colonne soit toujours égale à $2x$ et lorsque les deux éléments sont des nombres premiers, on appelera cette somme une décomposition Goldbach de $2x$.

Par exemple, les décompositions Goldbach des nombres 12 et 20 sont colorées en vert.

12	11	10	9	8	7	6
0	1	2	3	4	5	6

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

L'idée consiste alors à s'intéresser non plus aux sommes des deux nombres de chaque colonne mais à leur produit. Les décompositions Goldbach sont alors représentées par des nombres que l'on dit 2-presque-premiers, c'est à dire égaux

[1]Les recherches présentées ici ont commencé il y a deux ans lorsque j'ai lu le roman de Doxiadis "Oncle Pétros et la Conjecture de Goldbach".

au produit de deux nombres premiers.

On peut présenter ces produits par colonne dans un tableau et colorer dans ce tableau les nombres 2-presque-premiers qui sont autant de décompositions Goldbach de nombres pairs en colonne 1. Est fourni après la bibliographie un graphique qui présente les décompositions Goldbach des premiers nombres pairs.

		-1	*-4*	*-9*	*-16*	*-25*	*-36*	*-49*	*-64*	*-81*	*-100*	
2	1											
4	4	3										
6	9	8	5									
8	16	15	12	7								
10	25	24	21	16	9							
12	36	35	32	27	20	11						
14	49	48	45	40	33	24	13					
16	64	63	60	55	48	39	28	15				
18	81	80	77	72	65	56	45	32	17			
20	100	99	96	91	84	75	64	51	36	19		
22	121	120	117	112	105	96	85	72	57	40	21	
24	144	143	140	135	128	119	108	95	80	63	44	...
26	169	168	165	160	153	144	133	120	105	88	69	...
28	196	195	192	187	180	171	160	147	132	115	96	...

Comment obtient-on le contenu des cases de ce tableau, qui sont en fait des différences de carrés ?

$$c(i,j) = i^2 - (j-1)^2$$

Si l'on excepte les nombres de la première colonne [2] (correspondant aux nombres pairs qui sont des doubles de nombres premiers, et qui vérifient trivialement la conjecture de Goldbach), les nombres colorés (correspondant aux décompositions Goldbach) ont toujours au-dessus d'eux leur totient d'Euler, alors que cela n'est pas le cas des nombres non colorés.

Le fait que la conjecture de Goldbach soit vraie ou pas serait donc lié au fait qu'il existe ou pas, pour tout x, une solution à l'équation :

$$\varphi((x+1)^2 - a^2) = x^2 - a^2$$

Dit autrement, il faudrait démontrer que, quelque soit x, il existe $y = pq$, p et q premiers, tel que $\varphi(y)$ appartient à la partie de $\aleph$ suivante :
$P(n) = \{x^2 - i^2, i < x - 1\}$. Si c'est le cas, $(x+1)^2 - a^2 = pq$ et $2x = p + q$.

[2]dans le cas des nombres de la première colonne, dans la case au-dessus de chaque nombre coloré on trouve le nombre $\varphi(n) - 2\sqrt{n} + 1$

3 Conclusion

Les deux énoncés *tout nombre pair supérieur à* 2 *est la somme de deux nombres premiers"* et *tout nombre entier supérieur à 3 est la moyenne arithmétique de deux nombres premiers* deviendront peut-être des théorèmes...

References

[1] C.F. GAUSS. *Recherches arithmétiques*. Éd. Jacques Gabay, 1989.

[2] M. GUINOT. *Ce "diable d'homme" d'Euler*. Éd. Aleas, 2000.

[3] F. CASIRO. *La conjecture de Goldbach, un défi en or*. Éd. Tangente n°78, décembre 2000, janvier 2001.

[4] J.P. DELAHAYE. *Merveilleux nombres premiers, voyage au coeur de l'arithmétique*. Éd. Belin Pour la Science, 2000.

[5] A. DOXIADIS. *Oncle Pétros et la conjecture de Goldbach*. Éd. Points Seuil 2003.

[6] M. DU SAUTOY. *The music of the primes*. Éd. Fourth Estate, 2003.

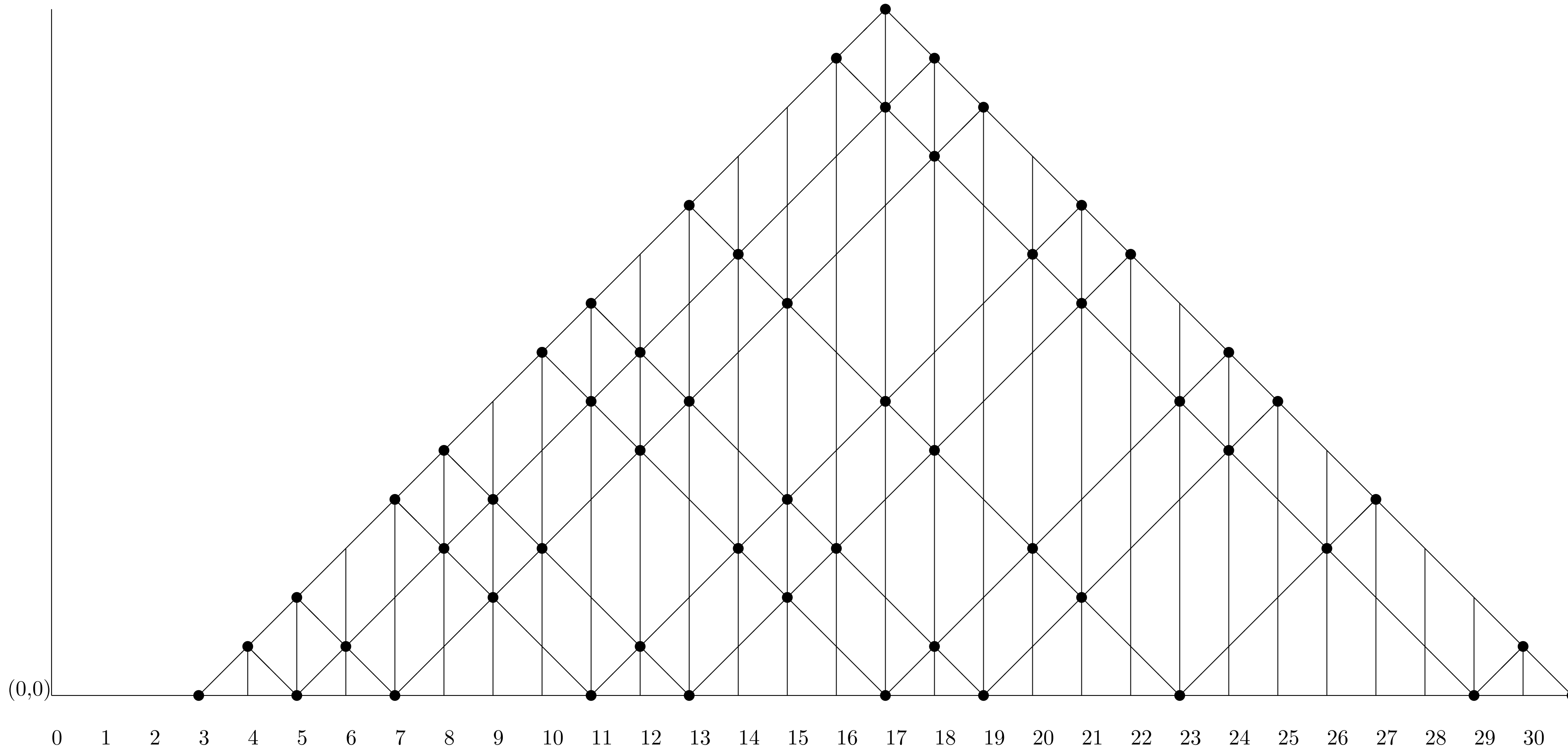

Figure 1: Le treillis Goldbach