Discret / découverte merveilleuse d'Euler (DV, 24/6/2015)

Le 9 janvier 2008, on avait posté une petite note dont le paragraphe 2 fournissait des éléments en lien avec un article sublime d'Euler intitulé "Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs". Dans cette note en français[1], Euler fournit une récurrence surprenante qui lie entre elles les sommes des diviseurs des entiers successifs.

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - ...$$

Monsieur Dominique Giard fournit sur la toile, dans les annexes de la séquence $A000203$ de l'OEIS (la On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) concernant la somme des diviseurs d'un entier, une autre récurrence, non moins surprenante, pour calculer la somme des diviseurs d'un entier.

$$\sigma(x) = \frac{12}{x^2(x-1)} \sum_{k=1}^{x-1} (-x^2 + 5kx - 5k^2)\sigma(k)\sigma(x-k)$$

On avait vérifié avec surprise en 2008 que cette récurrence calculait bien la somme des diviseurs. Il s'agit de multiplier les éléments de deux triangles de nombres, qui rappellent le triangle de Pascal.

Le premier triangle contient les nombres :

1								
1	1							
−1	4	−1						
−5	5	5	−5					
−11	4	9	4	−11				
−19	1	11	11	1	−19			
−29	−4	11	16	11	−4	−29		
−41	−11	9	19	19	9	−11	−41	
−55	−20	5	20	25	20	5	−20	−55

Ce triangle contient les coefficients multiplicatifs $p(n,k) = -n^2 + 5kn - 5k^2$ pour n variant de 2 à 10 et pour k variant dans chaque ligne de 1 à $n-1$.

Le deuxième triangle, quant à lui, contient :

1								
3	3							
4	9	4						
7	12	12	7					
6	21	16	21	6				
12	18	28	28	18	12			
8	36	24	49	24	36	8		
15	24	48	42	42	48	24	15	
13	45	32	84	36	84	32	45	13

Pour trouver le premier élément de chaque ligne de ce deuxième triangle, on multiplie terme à terme les éléments des lignes précédentes dans les deux triangles et on multiplie le résultat par $\dfrac{12}{n^2(n-1)}$.

Pour trouver les autres éléments d'une ligne, on se sert des premiers éléments de chaque ligne, en les multipliant deux à deux.

Les premiers éléments des lignes de ce deuxième triangle sont les sommes des diviseurs des entiers successifs.

[1]Le fait qu'Euler ait écrit cette note en français est assez exceptionnel, ses notes étant plutôt écrites habituellement en latin ou allemand. La note est trouvable à l'adresse http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE$_EULER_{12}$

Montrons comment trouver les éléments des triangles en multipliant des matrices.
On utilise la matrice d'entiers M_n qui contient les éléments $M_{n,d} = d$ si $d \mid n$ et 0 sinon.

$$M_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Ici, $\sigma(9) = 13$ est la somme des éléments de la dernière ligne.

On écrit la matrice "à l'envers" en la multipliant à gauche par une matrice diagonale de 1 "inversée", dans le sens où les 1 sont sur la diagonale nord-est / sud-ouest.

$$M_{diag} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{9-tourne} = M_{diag}.M_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis on multiplie $M_{9-tourne}$ par une matrice triangulaire pleine de 1.

$$M2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le positionnement des éléments dans les matrices est important car la multiplication matricielle s'effectue, comme l'écriture manuscrite, d'abord de la gauche vers la droite, puis du haut vers le bas.

On obtient par cette première multiplication $M_{9-tourne}.M2$ une matrice dans laquelle les sommes des diviseurs des entiers successifs sont dans la première colonne.

$$M_{9-tourne}.M2 = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 15 & 15 & 7 & 7 & 7 & 7 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 6 & 6 & 6 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, on multiplie à nouveau le résultat par la matrice triangulaire pleine de 1.
On obtient la matrice ci-dessous :

$$M_{9-tourne}.M2.M2 = \begin{pmatrix} 39 & 38 & 37 & 33 & 29 & 25 & 21 & 17 & 13 \\ 65 & 64 & 61 & 58 & 51 & 44 & 37 & 30 & 15 \\ 30 & 29 & 28 & 27 & 26 & 25 & 24 & 16 & 8 \\ 70 & 69 & 66 & 60 & 54 & 48 & 36 & 24 & 12 \\ 34 & 33 & 32 & 31 & 30 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 49 & 48 & 45 & 42 & 35 & 28 & 21 & 14 & 7 \\ 30 & 29 & 28 & 24 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 25 & 24 & 21 & 18 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette fois-ci on voit apparaître dans la dernière colonne les sommes de diviseurs qui nous intéressent. On voit aussi apparaître, comme par magie, un certain nombre des autres valeurs du deuxième triangle qui nous intéressent également considérablement puisqu'elles interviennent dans tous les calculs intermédiaires (les lire de bas en haut, par exemple du 3 tout en bas au 24 de la colonne, en remontant, ou bien du 4 tout en bas au 48 de cette même colonne, etc).

Si on arrive à positionner les sommes de diviseurs des nombres sur la diagonale de la matrice d'un opérateur, un nombre premier présentant cette particularité d'avoir sa somme de diviseurs qui vaut $p+1$, les nombres premiers seront "presque" les valeurs propres de l'opérateur en question.