Petites idées (DV, 11/6/2015)

1) *Sommes de cosinus*

On a proposé la fonction $sumsumcos(n)$ dont les zéros sont les nombres premiers[1 2].

$$sumsumcos(n) = \sum_{b=2}^{n-1} \sum_{o=1}^{b} cos\left(\frac{2\pi no}{b}\right)$$

On est très tenté d'utiliser la fonction d'Euler $cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ pour réécrire cette formule en :

$$sumsumcos(n) = \sum_{b=2}^{n-1} \sum_{o=1}^{b} \frac{1}{2}(e^{i\frac{2\pi no}{b}} + e^{-i\frac{2\pi no}{b}})$$

On aimerait établir un lien entre cette vision des nombres premiers comme zéros d'une fonction simple et une modélisation à base d'opérateurs matriciels.

Pour cela, on peut définir une matrice qui contient ligne par ligne les cosinus à additionner, y compris pour les deux indices exclus pour le calcul des zéros qui correspondent aux bornes $b = 1$ et $b = n$. Cette matrice M est triangulaire (haute-gauche) et contient à la position b, o l'élément $a_{b,o} = cos\left(\frac{2\pi no}{b}\right)$. En multipliant cette matrice par la matrice triangulaire haute-gauche pleine de 1, on obtient sur la diagonale les différentes sommes de cosinus à additionner et dont il faut tester l'égalité à $1 + n$ pour savoir si n est un nombre premier (on pourrait par un artifice rajouter ce $1 + n$ à l'une des extrémités de la diagonale par exemple). On appelle trace la somme des éléments diagonaux.

Montrons sur un exemple de matrices de lettres qu'on obtient bien les sommes souhaitées sur la diagonale.

Si $M = \begin{pmatrix} q & r & s & t \\ u & v & w & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors

$MT = \begin{pmatrix} q+r+s+t & q+r+s & q+r & q \\ u+v+w & u+v+w & u+v & u \\ x+y & x+y & x+y & x \\ z & z & z & z \end{pmatrix}$.

On trouve naturel de relier cette matrice de cosinus à une vision des nombres qu'on a proposée à base d'ondes (co)sinusoidales de divisibilité par les entiers qui leur sont inférieurs (*tous* ceux qui leur sont inférieurs, comme proposé ici, ou bien seulement les nombres premiers qui sont inférieurs à leur racine).

Informatiquement, la double somme "se code" par deux boucles for imbriquées et c'est peut-être là que réside la non-commutativité. Il faut définir d'abord l'indice de la somme externe pour pouvoir définir ensuite l'indice de la somme interne dont la dernière valeur dépend. Il faut avoir à l'esprit qu'on peut penser soit qu'une énorme matrice infinie contiendrait directement toutes les valeurs soit qu'il faut construire cette matrice petit à petit, au fur et à mesure que n grandit et ceci incrémentalement. Du point de vue informatique, la non-commutativité résiderait alors dans la séquencialité du déroulement des instructions d'un programme en général (et dans ce cas précis, elle interviendrait notamment dans la définition des variables utilisées dans les instructions des deux boucles for).

2) *Suites infinies alternées*

Chacun des cosinus dans la somme de sommes ci-dessus est égal à une suite infinie alternée.

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Pour la fonction *zêta* de Riemann aussi, on dispose d'une définition faisant intervenir une suite infinie alternée : on peut étendre ζ sur $Re(s) > 0$ à partir de la définition de la série alternée appelée fonction

[1] La démonstration d'une égalité similaire portant sur la somme des diviseurs est à trouver dans un livre de Jean-Marie De Koninck. La somme des diviseurs d'un nombre premier p vaut $p + 1$.

[2] Les noms d'indice ont été choisis pour que soit perçue subliminalement l'expression poétique "deux pianos sur baie".

êta de Dirichlet.

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

$$\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1-2^{1-s}}$$

3) *Exprimer la récurrence merveilleuse à l'aide de matrices*

Mais l'idée qu'il me plairait vraiment d'amener à son terme, c'est l'idée de coder la récurrence extraordinaire de la somme des diviseurs dans le formalisme matriciel par des matrices triangulaires et d'utiliser le fait qu'un nombre premier p a sa somme des diviseurs qui vaut $p+1$ pour établir peut-être d'une autre manière encore que la non-commutativité est nécessaire pour appréhender l'ensemble des nombres premiers.

On a lu qu'une récurrence élémentaire (celle de Fibonacci, $u_0 = 1, u_1 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, se code simplement avec des matrices, et le nombre d'or apparaît dans la matrice dont on peut calculer les puissances) et on pense qu'il doit ainsi y avoir un ou plusieurs nombres qui "dirigent" la répartition des nombres premiers[3].
La récurrence extraordinaire est :

$$\sigma(x) = \frac{12}{x^2(x-1)} \sum_{k=1}^{x-1} (-x^2 + 5kx - 5k^2)\sigma(k)\sigma(x-k)$$

[3]On a lu que les vecteurs propres d'un opérateur fournissent la direction des transformations quand les valeurs propres en fournissent la vitesse en quelque sorte.