

1. Introduction et principe de l'involution

La **ruse de Franklin** (ou involution de Franklin, due au mathématicien Fabian Franklin en 1881) est une démonstration bijective élégante du **théorème des nombres pentagonaux d'Euler**. Elle utilise les **diagrammes de Ferrers** pour associer les partitions d'un entier en parts distinctes de longueur paire à celles de longueur impaire.

Dans un diagramme de Ferrers représentant une partition en parts distinctes, Franklin identifie deux éléments géométriques clés :

1. **La base (B)** : la dernière ligne du bas (la plus petite part). Soit b son nombre d'éléments.
2. **La pente (S)** : le segment de points diagonaux partant du dernier élément de la première ligne et descendant vers le bas à droite. Soit s son nombre d'éléments.

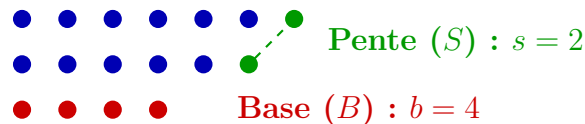
L'astuce consiste à essayer de déplacer soit la base vers la pente, soit la pente vers la base pour changer la parité du nombre de parts :

- **Si $b \leq s$** (et sans intersection bloquante) : On déplace la base B pour former une nouvelle pente à droite.
- **Si $b > s$** (et sans intersection bloquante) : On déplace la pente S pour en faire une nouvelle base en bas.

Cette opération est une involution (sa propre réciproque). Elle échoue uniquement pour les diagrammes "parfaits" correspondant aux **nombres pentagonaux** ($n = \frac{k(3k \pm 1)}{2}$), ce qui prouve la formule d'Euler.

2. Visualisation et définition de la base et de la pente

Voici la représentation graphique des éléments de base sur le diagramme de la partition $17 = 7+6+4$ (un cas où l'involution fonctionne parfaitement) :



3. Exemple réussi de l'involution

Puisque pour la partition $7 + 6 + 4$, on a $b = 4$ et $s = 2$, on est dans le cas $b > s$. La règle impose de déplacer la pente S pour en faire une nouvelle base tout en bas. On obtient ainsi la partition $6 + 5 + 4 + 2 = 17$ (le nombre de parts passe de 3 à 4) :

Avant : $7 + 6 + 4$ (3 parts, impair) Après : $6 + 5 + 4 + 2$ (4 parts, pair)



4. L'appariement et l'annulation combinatoire

Soit $\mathcal{D}_e(n)$ l'ensemble des partitions de n en parts distinctes ayant un **nombre pair** de sommants, et $\mathcal{D}_o(n)$ celles ayant un **nombre impair** de sommants.

L'involution associe de façon unique un élément de $\mathcal{D}_e(n)$ à un élément de $\mathcal{D}_o(n)$ en modifiant le nombre de parts de ± 1 .

Exemple d'appariement pour $n = 7$:

- Parts distinctes paires ($\mathcal{D}_e$) : $6 + 1$ et $5 + 2$
- Parts distinctes impaires ($\mathcal{D}_o$) : 7 and $4 + 3$

L'appariement se fait ainsi : $(6 + 1) \longleftrightarrow (7)$ et $(5 + 2) \longleftrightarrow (4 + 3)$. L'annulation est parfaite : $2 - 2 = 0$.

5. Les deux cas d'échec (nombres pentagonaux)

L'involution échoue lorsque le diagramme forme un trapèze parfait où la base et la pente s'intersectent.

5.1. Premier type d'échec : $b = s$

Exemple pour $12 = 5 + 4 + 3$. On a $b = 3$ et $s = 3$. La base et la pente partagent le dernier point en bas à droite.



Si on essaie de déplacer la base vers la pente, il manque une ligne pour positionner le dernier élément de manière valide.

5.2. Second type d'échec : $b = s + 1$

Exemple pour $11 = 5 + 4 + 2$. On a $b = 2$ et $s = 2$.



Ici, déplacer la base pour l'ajouter à la pente créerait deux lignes de même longueur, violant la condition de stricte décroissance des parts distinctes.

6. Le théorème d'Euler

Grâce à cette analyse, la fonction génératrice s'écrit :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(x^{\frac{k(3k-1)}{2}} + x^{\frac{k(3k+1)}{2}} \right) \quad (1)$$

Ce qui donne le développement célèbre :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \dots \quad (2)$$

Cette formule est notamment fondamentale pour l'étude des identités liées aux **sommes des diviseurs** $\sigma(n)$ via les récurrences d'Euler.

Référence

Franklin, F., 1881, Sur le développement du produit infini $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots$ Comptes rendus de l'Académie des sciences, 82, 448-450.