Poursuite des expérimentations

Les tableaux suivants fournissent les nombres de décompositions de Goldbach de certains nombres pairs, inférieurs à 10^7, et respectant certains critères. Dans la suite, on notera $r(n)$ le nombre de décompositions différentes de n comme somme de deux nombres premiers.

n = $2^k.3$	$r(n)$
6	1
12	1
24	3
48	5
96	7
192	11
384	19
768	31
1536	47
3072	79
6144	145
12288	226
24576	397
49152	675
98304	1185
196608	2110
393216	3679
786432	6639
1572864	11952
3145728	21367
6291456	38887
n = $2^k.5$	$r(n)$
10	2
20	2
40	3
80	4
160	8
320	11
640	18
1280	27
2560	48
5120	76
10240	141
20480	234
40960	387
81920	671
163840	1194
327680	2133
655360	3809
1310720	6762
2621440	12226
5242880	22134

n $= 2^k.7$	$r(n)$
14	2
28	2
56	3
112	7
224	7
448	13
896	20
1792	36
3584	55
7168	94
14336	152
28672	276
57344	467
114688	818
229376	1424
458752	2516
917504	4503
1835008	8102
3670016	14633
7340032	26662
n $= 2^k.11$	$r(n)$
22	3
44	3
88	4
176	7
352	10
704	18
1408	25
2816	40
5632	74
11264	124
22528	206
45056	346
90112	638
180224	1066
360448	1938
720896	3385
1441792	6151
2883584	11147
5767168	20027

n $= 2^k.13$	$r(n)$
26	3
52	3
104	5
208	7
416	10
832	22
1664	28
3328	46
6656	80
13312	139
26624	230
53248	404
106496	688
212992	1222
425984	2146
851968	3874
1703936	6972
3407872	12558
6815744	22769
n $= 2.3^k$	$r(n)$
6	1
18	2
54	5
162	10
486	23
1458	48
4374	102
13122	245
39366	561
118098	1369
354294	3418
1062882	8599
3188646	21650
9565938	55711
n $= 2.5^k$	$r(n)$
10	2
50	4
250	9
1250	28
6250	95
31250	326
156250	1179
781250	4359
3906250	17187

n = 2.7^k	$r(n)$
14	2
98	3
686	16
4802	64
33614	309
235298	1442
1647086	7407
n = 2.11^k	$r(n)$
22	3
242	8
2662	44
29282	251
322102	1756
3543122	13202

Pour les nombres dans la factorisation desquels interviennent plusieurs nombres premiers impairs, il semblerait que :

$$Si\ a \mid b\ alors\ r(a) \ \leq \ r(b).$$

C.P.Bruter me fait remarquer que $r(n)$ est souvent la somme de plusieurs nombres $r(a_i)$ avec $a_i \ < \ n$.

Effectivement, dans le tableau des $2^k.13$, on relève les partitions suivantes :
$r(5) = 10 = r(4) + r(2) = 7 + 3$
$22 = 10 + 7 + 5$
$28 = 10 + 7 + 5 + 3 + 3$
$46 = 28 + 10 + 5 + 3$
$80 = 46 + 28 + 3 + 3$
$139 = 80 + 46 + 10 + 3$
$230 = 139 + 46 + 28 + 10 + 7$
$404 = 230 + 139 + 28 + 7$
$688 = 404 + 230 + 46 + 5 + 3$
$1222 = 688 + 404 + 80 + 28 + 22$
$2146 = 1222 + 688 + 230 + 3 + 3$
$3874 = 2146 + 1222 + 404 + 80 + 22$
$6972 = 3874 + 2146 + 688 + 230 + 28 + 3 + 3$
$12558 = 6972 + 3874 + 1222 + 404 + 80 + 3 + 3$
$22769 = 12558 + 6972 + 2146 + 688 + 230 + 139 + 28 + 5 + 3$

Dans le tableau des $2^k.5$, on peut trouver une partition du dernier nombre de décompositions :
$22134 = 12226 + 6762 + 2133 + 671 + 234 + 76 + 18 + 8 + 4 + 2$

Les partitions des $r(n)$ des 4 premiers tableaux seront ajoutés en annexe.

Un élément important est le suivant : on pourrait croire que ces partitions ne sont possibles que parce que les ensembles de nombres premiers dont on additionne les cardinaux sont disjoints deux à deux, ce qui n'est absolument pas le cas : 71 et 91 par exemple sont tous deux décomposants des nombres 13312 et 3328 qui appartiennent à des ensembles dont on va ajouter les cardinaux pour obtenir le cardinal de l'ensemble de décompositions de 26624. C'est donc bien la relation qu'entretiennent les décomposants de Goldbach au pair qu'ils décomposent et non leurs qualités intrinsèques qui intervient vraisemblablement ici.

Les partitions utilisées dans le tableau des $2^k.3$, celui des $2^k.5$ ou celui des $2^k.13$ ne présentent pas de similarité entre elles (les lignes utilisées pour en trouver une autre ne sont pas les mêmes dans l'un et l'autre cas).

Quand on essaie de trouver similairement des partitions des $r(n)$ faisant intervenir des "$r(m)$ plus petits" dans les tableaux des nombres de la forme $2.p^k$, on ne peut y parvenir car les $r(n)$ croissent trop rapidement.

On essaie de comparer plutôt de façon transversale les $r(n)$ des nombres de la forme $2p^k$ à ceux de leur correspondant de la forme $2kp$. C'est ce qui est présenté dans le tableau suivant :

Il semble qu'on ait toujours la relation suivante : $r(2p^k) > r(2kp)$.

n = $2p^k$	$r(n)$	$n' = 2kp$	$r(n')$
$18 = 2.3^2$	2	2.2.3	1
$50 = 2.5^2$	4	2.2.5	2
$98 = 2.7^2$	3	2.2.7	2
$242 = 2.11^2$	8	2.2.11	3
$54 = 2.3^3$	5	2.3.3	2
$250 = 2.5^3$	9	2.3.5	3
$686 = 2.7^3$	16	2.3.7	4
$2662 = 2.11^3$	44	2.3.11	6
$162 = 2.3^4$	10	2.4.3	3
$1250 = 2.5^4$	28	2.4.5	3
$4802 = 2.7^4$	64	2.4.7	3
$29282 = 2.11^4$	251	2.4.11	4
$486 = 2.3^5$	23	2.5.3	3
$6250 = 2.5^5$	95	2.5.5	4
$33614 = 2.7^5$	309	2.5.7	5
$322102 = 2.11^5$	1756	2.5.11	6
$1458 = 2.3^6$	48	2.6.3	4
$31250 = 2.5^6$	326	2.6.5	6
$235298 = 2.7^6$	1442	2.6.7	8
$3543122 = 2.11^6$	13202	2.6.11	9
$4374 = 2.3^7$	102	2.7.3	4
$156250 = 2.5^7$	1179	2.7.5	5
$1647086 = 2.7^7$	7407	2.7.11	3

Enfin, on essaie d'établir des relations en utilisant le tableau des $r(n)$ pour les n de la forme $2^k.7.11$ en le mettant en regard des tableaux fournissant l'un les $r(n)$ des nombres de la forme $2^k.7$ et l'autre les $r(n)$ des nombres de la forme $2^k.11$ (cf. page 2).

n = $2^k.7.11$	$r(n)$
154	8
308	8
616	19
1232	28
2464	52
4928	70
9856	130
19712	219
39424	371
78848	654
157696	1179
315392	2037
630784	3689
1261568	6520
2523136	11918
5046272	21503

On n'arrive absolument pas à trouver quoi que ce soit.

Fournissons maintenant les valeurs de $\sigma(n)$ et de $r(n)$ pour les nombres de 3 à 100. Nous aimerions atteindre l'objectif suivant : trouver une relation de récurrence qui fournisse le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair en fonction des nombres de décompositions de Goldbach de nombres plus petits que lui.

Note : je remercie très vivement Daniel Diaz qui, en programmant des outils performants, me permet de mener à bien ces expérimentations.

n	$\sigma(n)$	r(n)	n	$\sigma(n)$	r(n)	n	$\sigma(n)$	r(n)	n	$\sigma(n)$	r(n)
3	4	1	28	56	3	53	54	6	78	168	11
4	7	1	29	30	4	54	120	8	79	80	5
5	6	2	30	72	6	55	72	6	80	186	8
6	12	1	31	32	3	56	120	7	81	121	10
7	8	2	32	63	5	57	80	10	82	126	5
8	15	2	33	48	6	58	90	6	83	84	6
9	13	2	34	54	2	59	60	6	84	224	13
10	18	2	35	48	5	60	168	12	85	108	9
11	12	3	36	91	6	61	62	4	86	132	6
12	28	3	37	38	5	62	96	5	87	120	11
13	14	3	38	60	5	63	104	10	88	180	7
14	24	2	39	56	7	64	127	3	89	90	7
15	24	3	40	90	4	65	84	7	90	234	14
16	31	2	41	42	5	66	144	9	91	112	6
17	18	4	42	96	8	67	68	6	92	168	8
18	39	4	43	44	5	68	126	5	93	128	13
19	20	2	44	84	4	69	96	8	94	144	5
20	42	3	45	78	9	70	144	7	95	120	8
21	32	4	46	72	4	71	72	8	96	252	11
22	36	3	47	48	5	72	195	11	97	98	7
23	24	4	48	124	7	73	74	6	98	171	9
24	60	5	49	57	3	74	114	5	99	156	13
25	31	4	50	93	6	75	124	12	100	217	8
26	42	3	51	72	8	76	140	4			
27	40	5	52	98	5	77	96	8			

La conjecture de Goldbach est trivialement vérifiée pour les nombres pairs doubles de premiers. Il faudrait dans un premier temps la prouver pour les nombres de la forme $2.p^2$ qui semblent fournir les valeurs minimales de la comète. Ensuite, les nombres d'une autre forme seront ramenés aux nombres de la forme $2p$ par le théorème des restes chinois. Je crois par exemple que 2.3^6 a 48 décomposants, comme toute une série de nombres tels que $900, 1092, 1368, 1404, 1458, 1524, 1750, 1960, 2080, 2320, 2420, 2548, 2560, 2620$ $2674, 2690, 2912, 3034, 3098, 3110, 3208, 3232,$ *etc* parmi lesquels il doit sûrement y avoir un $2p$ notamment en vertu du théorème de Dirichlet. En quelque sorte, on fait une projection d'un point de la comète sur un point d'abscisse plus élevée et de même ordonnée, à cause de certaines propriétés. Et cette manière de voir est contraire à la notion même de récurrence qui veut qu'on puisse calculer $r(n)$ en fonction de $r(m)$ plus petits ; là, il s'agirait plutôt de trouver $r(n)$ comme étant égal au $r(n')$ d'un nombre n' plus grand que n.

On rappelle que l'on cherche, pour un nombre pair $2n$ donné, l'ensemble des nombres premiers q, non congrus à $2n$ selon tout p' premier inférieur ou égal à $\sqrt{2n}$.