Deux approches de la conjecture de Goldbach

Denise Vella

Mai 2006

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*[1].

2 Approche utilisant le nombre de facteurs de la factorisation d'une factorielle

Etudions quelques exemples. On cherche les sommes de deux nombres premiers valant 12 (on les appellera *décompositions Goldbach de* 12). Pour cela, on va disposer les nombres impairs dont la somme vaut 12 par colonnes ayant même total dans un tableau.

9	7
3	5

Calculons maintenant le nombre de facteurs du produit de ces nombres : 3.5.7.9. La factorisation de ce produit a 5 facteurs (potentiellement égaux). Or, le tableau contient quatre nombres disposés dans deux colonnes. Puisque $5 \leq 4+2$, il y a forcément deux nombres premiers dans une même colonne (en l'occurrence 5 et 7). Recherchons les décompositions Goldbach de 14. Les nombres sont alors disposés comme suit dans le tableau.

11	9	7
3	5	

La factorisation du produit des 5 nombres impairs fait intervenir 6 facteurs. $6 \leq 5+2$. Les 2 colonnes ne peuvent donc pas contenir chacune un composé.

Généralisons : si on a $2n$ nombres impairs (resp. $2n+1$ dans un cas sur deux, quand on cherche les décompositions Goldbach du double d'un nombre impair) disposés dans n colonnes, et que la factorisation du produit de ces nombres impairs fait intervenir moins de $3n$ (resp. $3n+1$ dans le cas du double d'un impair) facteurs premiers, alors deux nombres premiers se retrouveront dans la même colonne et constitueront une décomposition Goldbach du nombre pair égal au total de chaque colonne (qui est $4n+2$).

[1]Les recherches présentées ici ont été déclenchées par la lecture du roman de Doxiadis "Oncle Pétros et la Conjecture de Goldbach".

Problème : pour résoudre la conjecture, il faudrait donc :
1) être capable de trouver le nombre de facteurs du produit des $2n$ (ou $2n+1$) premiers nombres entiers impairs (on ne compte pas 1) ;
2) être capable de démontrer que ce nombre est toujours inférieur à $3n$ (ou $3n+1$).
Continuons par l'exemple : voyons les factorisations des nombres de 2 à 20 (ces factorisations nous intéressent pour trouver les décompositions Goldbach de 22).

2	2											
3					3							
4	2	2										
5							5					
6	2				3							
7								7				
8	2	2	2									
9					3	3						
10	2						5					
11									11			
12	2	2			3							
13										13		
14	2							7				
15					3		5					
16	2	2	2	2								
17											17	
18	2				3	3						
19												19
20	2	2					5					

Le nombre de facteurs de la factorielle de 20 se décompose de la façon suivante (en les comptant colonne par colonne)[2] :

$10 + 5 + 2 + 1 = 18$ facteurs 2
$6 + 2 = 8$ facteurs 3
4 facteurs 5
2 facteurs 7
1 facteur 11
1 facteur 13
1 facteur 17
1 facteur 19
Soit un total de : 36 facteurs.

Voyons maintenant le nombre de facteurs du produit des nombres entiers pairs de 2 à 20. On peut obtenir ce nombre de facteurs en ajoutant 10 (le nombre de facteurs 2) au nombre de facteurs de la factorielle de 10. On obtient $10+15 = 25$. Par soustraction, on obtient le nombre de facteurs du produit des nombres impairs compris entre 3 et 19, en l'occurrence $36 - 25 = 11$ facteurs pour le produit des 10 premiers nombres entiers impairs (on oublie 1). Ce nombre étant inférieur à $3 \times 4 + 1 = 13$ correspondant au nombre de facteurs assurant la

[2]Lucas fait état de résultats dans sa théorie des nombres concernant la divisibilité des factorielles. Par exemple, le plus grand exposant de la puissance d'un nombre premier p contenue dans le produit $n!$ des n premiers nombres a pour limite supérieure $\frac{n}{p-1}$ (p.362).

présence de 2 nombres premiers dans une même colonne (ici 9 impairs de 3 à 19 à placer dans 4 colonnes selon la méthode vue plus haut), on est assuré que le nombre 22 a au moins une décomposition Goldbach.
Il faut être capable de prouver que, quelque soit x :

$$NbFact\big(\prod_{i=2}^{x}(2i-1)\big) \leq \big\lfloor \frac{3}{2}(x-2)\big\rfloor$$

La fonction *NbFact* renvoie pour x entier le nombre de facteurs (potentiellement égaux) que contient la factorisation de x.
L'inégalité est plus lisible si on l'écrit :

$$NbFact((2x)!) - NbFact(x!) - x \leq \big\lfloor \frac{3}{2}(x-1)\big\rfloor$$

Notons les premières valeurs des deux membres de l'inégalité dans un tableau. On appellera le terme à gauche de l'inégalité NFFPI (pour Nombre de Facteurs de la Factorisation du Produit des Impairs !) en entête de la colonne 4.

x	$NbFact((2x)!)$	$NbFact(x!)$	$NFFPI$	$\frac{3}{2}(x-1)$
4	11	4	3	4
5	15	5	5	6
6	19	7	6	7
7	22	8	7	9
8	28	11	9	10
9	32	13	10	12
10	36	15	11	13
11	40	16	13	15
12	45	19	14	16
13	49	20	16	18
14	55	22	19	19
15	59	24	20	21
16	65	28	21	22
17	69	29	23	24
18	75	32	25	25
19	78	33	26	27
20	83	36	27	28
21	87	38	28	30
22	91	40	29	31
23	96	41	32	33
24	102	45	32	34
25	107	47	35	36

Malheureusement, il suffit d'effectuer le calcul pour la factorielle de 100 à peine pour se rendre compte que l'idée ne tient pas.
$NbFact(100!) - NbFact(50!) - 50 = 81 > 73$.
Etudions ce qui se produit pour les décompositions Goldbach de 100 : il y a 14 nombres premiers impairs de 3 à 50 et 10 nombres impairs non premiers dans le même intervalle. "En face", il y a 10 nombres premiers dont on aurait pu imaginer qu'ils se soient justement et très "malencontreusement" positionnés en face des composés, ce qui aurait fait échouer la conjecture.

Les premiers sont parfois symétriques les uns des autres autour de x non pas à cause du fait qu'ils sont un rien si nombreux qu'il ne pourrait en être autrement mais bel et bien à cause de contraintes fortes pesant sur leurs positions, qui fait qu'au moins l'un d'entre eux "se positionne en face d'un nombre premier inférieur à x".

Autre idée : trouver selon un raisonnement un peu similaire que le nombre de facteurs du produit $Produit(2x - p_i)$ quel que soit i inférieur à $\Pi(x)$ est inférieur à $2\Pi(x)$, ce qui nous garantirait que l'un au moins des $2x - p_i$ serait premier. On a écrit *Produit* au lieu de la notation habituelle du produit par la lettre Π pour éviter de confondre les deux acceptions mathématiques possibles du symbole. Dit autrement, ceux qui sont "en face des premiers plus petits que x" ne peuvent pas être tous composés simultanément. Malheureusement, autant on sait calculer le nombre de facteurs d'un produit, en utilisant la formule $NbFact(xy) = NbFact(x) + NbFact(y)$ (qui se décline en particulier pour p premier par $NbFact(px) = NbFact(x) + 1$), autant on ne sait pas trouver le nombre de facteurs d'une somme, ce qui nous permettrait de trouver le nombre de facteurs de chacun des $2x - p_i$.

Dernière piste basée sur le calcul d'un nombre de facteurs :
Pour montrer que les $2x - p_i$ (p_i impair inférieur à x) ne peuvent pas être tous composés simultanément, il faudrait montrer que le nombre de facteurs du produit des nombres compris entre x (non compris) et $2x$ est toujours strictement inférieur au résultat de l'expression suivante $NbFact(x!) - NbFact((x/2)!) + 3x/2$ (si tous les $2x - p_i$ (p_i impair) étaient composés, ils auraient au moins deux facteurs chacun, ce qui entraînerait un total d'au moins x facteurs, auquel il faut ajouter le nombre de facteurs 2 de la première colonne égal à $x/2$ auquel il faut ajouter le nombre de facteurs des nombres compris entre $x/2$ et x, ce dernier étant égal à $NbFact(x!) - NbFact((x/2)!)$.

Peut-être faut-il utiliser la formule :

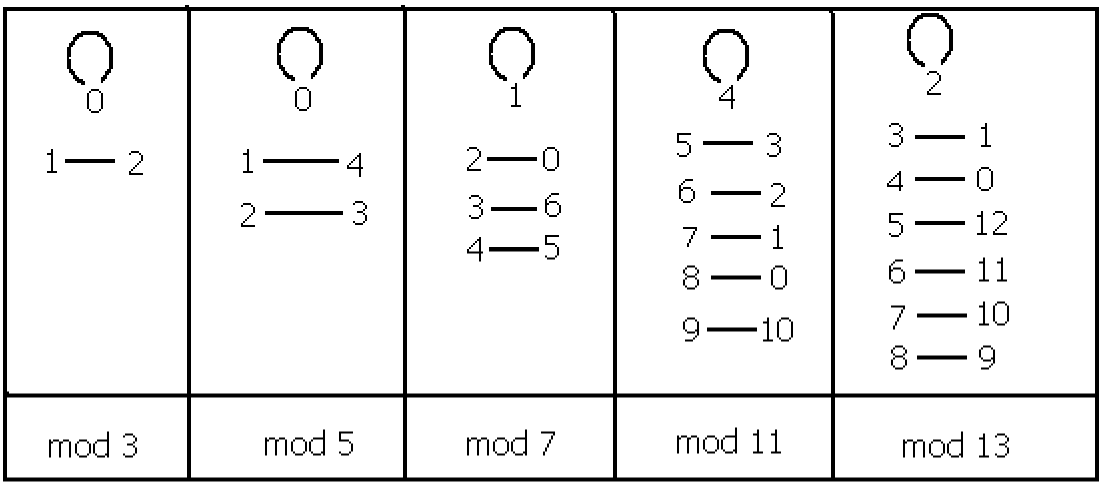
$$
\begin{array}{llcccccccc}
 & x & \Big(& \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2^2} & + & ... & + & \frac{1}{2^{x_2}} & \Big) \\
+ & x & \Big(& \frac{1}{3} & + & \frac{1}{3^2} & + & ... & + & \frac{1}{3^{x_3}} & \Big) \\
 & & & & & ... & & & & & \\
+ & x & \Big(& \frac{1}{p_i} & + & \frac{1}{p_i^2} & + & ... & + & \frac{1}{p_i^{x_i}} & \Big) \\
- & x/2 & \Big(& \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2^2} & + & ... & + & \frac{1}{2^{y_2}} & \Big) \\
- & x/2 & \Big(& \frac{1}{3} & + & \frac{1}{3^2} & + & ... & + & \frac{1}{3^{y_3}} & \Big) \\
 & & & & & ... & & & & & \\
- & x/2 & \Big(& \frac{1}{p_i} & + & \frac{1}{p_i^2} & + & ... & + & \frac{1}{p_i^{y_i}} & \Big) \\
+ & 3x/2 & & & & & & & & &
\end{array}
$$

dans laquelle p_i est le plus grand nombre premier inférieur à x, les nombres x_2, x_3, x_i (resp. les nombres y_2, y_3, y_i) sont les puissances maximales des facteurs premiers 2, 3, ou p_i dans la factorisation de x (resp. de $x/2$).
Si le nombre de facteurs du produit des impairs compris entre x et $2x$ était toujours inférieur à x, cela garantirait que les $2x - p_i$ (p_i impair) ne peuvent être tous simultanément composés, et a fortiori que les $2x - p_i$ (p_i premier) ne peuvent être tous simultanément composés, et impliquerait la conjecture. Il reste à trouver une ruse pour prouver que cela est toujours vrai, ou bien trouver un contre-exemple qui stopperait cette tentative aussi net que les précédentes. Contre-exemple trouvé dès 300 : le nombre de facteurs du produit des impairs compris entre 300 et 600 est 304 qui n'est pas inférieur à 300.

Il y a un phénomène qui peut surprendre : quand on calcule le nombre de décompositions Goldbach des entiers successifs, ce nombre semble régulièrement croître globalement. Mais comment cela n'est-il pas en contradiction avec le fait que les nombres premiers se raréfient de plus en plus ? Doit-on imaginer une espèce de "milieu de l'infini" (!) à partir duquel la tendance s'inverserait faisant alors décroître le nombre de décompositions Goldbach (comme selon une symétrie-miroir) pour tendre à l'infini vers les nombres de décompositions des premiers nombres entiers pairs ? Ou bien doit-on ne pas voir de contradiction entre l'augmentation du nombre de décompositions Goldbach et la raréfaction des nombres premiers, et imaginer que les nombres premiers sont en quelque sorte de "plus en plus rentables", c'est à dire qu'une proportion de plus en plus grande d'entre eux permettrait d'obtenir des décompositions Goldbach, ce qui ferait que même si les nombres premiers se raréfient le nombre de décompositions Goldbach quant à lui, augmente. Mystère...

3 Approche utilisant une vision ensembliste et relationnelle du problème

Dans une note précédente, on avait dessiné un maillage géométrique qui faisait apparaître les décompositions Goldbach et on avait vu que l'on pouvait représenter les relations symétriques liant les restes modulaires des nombres de part et d'autre d'un entier par des graphes symétriques. Par exemple, si l'on cherche les décompositions de 30, on a les 5 petits graphes de symétrie de la figure ci-dessous, correspondant aux nombres premiers inférieurs à 15 (moitié de 30).



On voit sur ces graphes que les nombres qui ne permettent pas d'obtenir de décompositions Goldbach sont toujours congrus à $(2x\ mod\ p)(modulo\ p)$ (en effet, ces nombres doivent être ajoutés à un composé pour trouver $2x$, qu'ils soient eux-mêmes premiers ou pas). Il faudrait tenir un raisonnement similaire à celui vu dans la première section, qui assurerait que même si certains nombres premiers sont éliminés du fait de leur "appariement à 0", l'ensemble résultant de l'élimination par modulo ne se retrouvera jamais complètement vide.

Ecrivons les nombres impairs de 3 à 15. Eliminons ceux qui sont congrus soit à $0\,(mod\ 3)$, soit à $0\,(mod\ 5)$, soit à $2\,(mod\ 7)$, soit à $8\,(mod\ 11)$, soit à $4\,(mod\ 13)$. 3, 5, 9 et 15 se trouvent éliminés par ce processus. Les nombres qui subsistent ont forcément un nombre premier en face. Mais sont-ils premiers eux-mêmes ? On doit constater que les différents ensembles de nombres éliminés ne sont pas disjoints 2 à 2. Par exemple, 9 est éliminé parce qu'il est congru à 0 (mod 3) mais également parce qu'il est congru à 2 (mod 7). Les 3 nombres premiers restant 7, 11 et 13 fournissent chacun l'une des décompositions Goldbach recherchées de 30.

Pourquoi est-il impossible d'éliminer tous les nombres premiers inférieurs à x par cette méthode ?

Plaçons nous dans le "pire des cas", où chacun des nombres premiers éliminerait un maximum de nombres impairs et où tous les ensembles de nombres ainsi éliminés seraient disjoints. Chaque nombre premier élimine $x/2p$ nombres impairs dans l'ensemble des impairs compris entre 3 et x. Puisqu'on s'est placé dans la "pire" hypothèse où les ensembles sont disjoints, le nombre total d'impairs éliminés est $\Sigma_{p_i \leq x} \frac{1}{2p_i}$. Si ce nombre est toujours inférieur à $x/2$, on est assuré qu'il restera un impair. Encore faut-il qu'il soit premier... On sait que les chances qu'a un nombre inférieur à x d'être premier sont égales au produit de x par le produit des $p-1/p$ avec p premier. Mais à nouveau, on est complètement bloqué quant à la façon de poursuivre dans cette voie.

D'un point de vue bibliographique, Erdös a introduit la notion d'ensemble de congruences couvrantes. Ici, il faudrait restreindre la notion et parler d'ensemble de congruences couvrant au moins un premier inférieur à x. L'ensemble de congruences correspondant à notre exemple s'écrit $\{(3,0),(5,0),(7,2),(11,8),(13,4)\}$. Cet ensemble couvre au moins un premier inférieur à 15.

Pour prouver la conjecture, il faudrait être capable de prouver que l'ensemble de congruences $\bigcup (p_i, 2x \; mod \; p_i)$ (p_i premier inférieur à x) couvre toujours un nombre premier inférieur à x.

4 Personnages

Des éléments de la biographie de trois personnages m'ont marquée pendant ces recherches : il s'agit de Leonhard Euler, Sophie Germain et Paul Erdös. L'article *"Découverte d'une loi toute extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs"* [5] est impressionnant. L'émerveillement du mathématicien devant la "magie" des nombres s'en dégage de façon intemporelle. J'ai programmé le calcul récursif de la somme des diviseurs mais la formule reste hermétiquement incompréhensible[3]. La deuxième personne dont la destinée est très émouvante est Sophie Germain, contrainte de se déguiser en homme pour accéder à une once de considération. Cette considération est loin d'être acquise par les femmes encore aujourd'hui ! Enfin, j'ai été émue par le personnage de Paul Erdös, le Peter Pan mathématicien errant. Terminons par l'une de ses phrases : *"Je sais que les nombres sont beaux. S'ils ne le sont pas, rien ne l'est."*

5 Interrogation

Il faut être très prudent et méfiant quand on a une "impression de convergence" lors de calculs par programme informatique. J'ai donc l'impression que la somme des inverses des primorielles converge vers 1.70523.... On peut trouver sur la toile une constante assez proche de celle-ci : c'est la constante de Niven, qui a travaillé sur l'exposant moyen des factorisations des entiers.

6 Conclusion

J'aimerais tellement (méthode incantatoire... !) utiliser la formulation *"tout entier naturel supérieur à 2 est le milieu de deux nombres premiers"*.

[3] Il y a peut-être une formule récursive semblable qui lie entre elles les décompositions Goldbach ou leurs nombres.

References

[1] A. Doxiadis. *Oncle Pétros et la conjecture de Goldbach.* Éd. Points Seuil 2003.

[2] B. Danchilla. *Summer 2003 Project : Open conjectures in number theory.* Éd. Note bibliographique, 2004.

[3] J.F. Gold, D.H. Tucker. *On a conjecture of Erdös.* Éd. Proceedings NCUR VIII, Vol.2, p.794-798, 1994.

[4] L. Euler. *Découverte d'une loi toute extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs.* Éd. Commentationes arithmeticae 2, p.639, 1849.

[5] M. Guinot. *Ce "diable d'homme" d'Euler.* Éd. Aleas, 2000.

[6] C.A. Laisant. *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach.* Éd. Bulletin de la S.M.F., n°25, p.108, 1/12/1897.

[7] G. Tenenbaum, M. Mendès France. *Les nombres premiers.* Éd. Que sais-je ?, n°571, 1997.