Conjecture de Goldbach,
Jacquard et réécriture

Denise Vella

Mars 2010

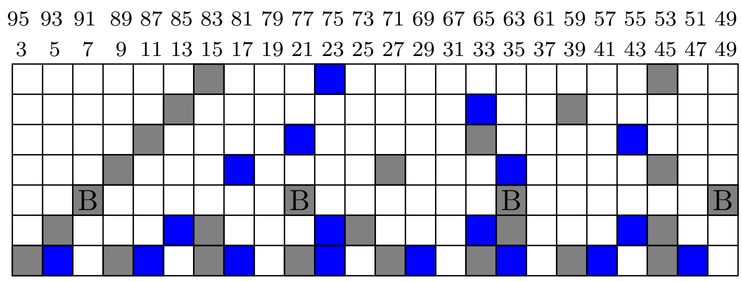
1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *“il semble que tout nombre supérieur à 2 soit la somme de trois nombres premiers”*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *“tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers”*.
Une nouvelle façon d’étudier la conjecture de Goldbach est présentée ici. Elle est basée sur l’arithmétique des tissus, d’Edouard Lucas, qui consiste à représenter les caractères de divisibilité des nombres comme les mailles colorées de pièces de Jacquard, et sur la notion de réécriture, qui est utilisée dans la théorie des langages.

Il s’agit de mettre à jour un raisonnement qui assurerait l’existence d’au moins un décomposant de Goldbach pour tout nombre pair.

2 Présentation de la modélisation choisie

A chaque nombre pair, nous avons associé une *grille de divisibilité*, telle que celle présentée ci-dessous, qui est associée au nombre pair 98 :



On a choisi de représenter les caractères de divisibilité des nombres intervenant dans les décompositions de $2x$, un nombre pair donné, en deux nombres impairs compris au sens large entre 3 et x selon le code couleur suivant (remarque : on ne colorie que les cases (i, j) telles que $j \leq i$) :

- la case (i, j) est colorée en gris si $2j + 1$ divise p (le $i^{ème}$ nombre impair à partir de 3) sans diviser $q = 2x - p$;
- la case (i, j) est colorée en bleu si $2j + 1$ divise q sans diviser p ;
- la case (i, j) est colorée en gris et contient un B (on la dit *mixte*) si $2j + 1$ divise à la fois p et q ;
- la case (i, j) est colorée en blanc sinon.

Quelques remarques :

- notre choix de modélisation ne permet pas le repérage des décompositions de Goldbach de $2x$ qui font intervenir un "petit premier" (i.e. les décompositions de $2x$ en $p + q$ avec p nombre premier impair inférieur à $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$) ;
- les lignes associées aux nombres composés n'ajoutent pas d'information supplémentaire (si un nombre composé x divise y, tout diviseur premier de x divise y également) mais dans la mesure où elles nous ont permis le repérage de certaines régularités, on les a conservées dans les grilles fournies en annexe ;
- les cases grises et mixtes "ne bougent pas" dans les grilles (i.e. ne changent pas de position) alors que les cases bleues avancent systématiquement d'une colonne vers la droite.

On comprend aisément que les colonnes dont toutes les cases contiennent la lettre V correspondent aux décompositions de Goldbach de $2x$ en une somme $p + q$, avec $p \geq \lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

3 Règles de substitutions horizontales

On va substituer (selon la théorie des substitutions de Camille Jordan) certains couples de lettres par d'autres. Trois règles de substitution déterministes s'appliquent en milieu de mots. 2 règles s'appliquent en fin de mot, dans le cas de l'ajout d'une colonne.
Les 3 règles de réécriture en milieu de mot sont les suivantes :

$$\begin{array}{lcl} BV & \to & VB \\ BG & \to & VM \\ MV & \to & GB \end{array}$$

Les 2 règles de réécriture en fin de mot dans le cas de l'ajout d'une colonne sont les suivantes :

$$\begin{array}{lcl} B & \to & VM \\ V & \to & VV \end{array}$$

La façon de considérer la conjecture de Goldbach présentée ici est de nature algorithmique. Elle consiste à considérer un objet en entrée (la grille associée à un nombre pair, qui possède certaines propriétés), à appliquer à cet objet un certain nombre de règles de modification (les substitutions de lettres présentées ci-dessus), et à obtenir un certain objet en sortie, qui possèdera lui aussi certaines propriétés. La propriété qui nous intéresse pour prouver la conjecture de

Goldbach est l'existence dans la grille d'arrivée d'une colonne de cases vides et l'on aimerait trouver un raisonnement par récurrence qui garantisse cette propriété dans la grille d'arrivée si elle est vérifiée par la grille de départ.
Ce qui est troublant, c'est que des transformations horizontales aient une conséquence verticale qui est que les grilles obtenues contiennent toutes au moins une colonne ne contenant que des cases vides et prouver que cette conséquence est toujours vérifiée prouverait la conjecture de Goldbach. Il faudrait trouver ce que l'on appelle en informatique un invariant de programme, qui assurerait l'existence d'une colonne vide à chaque pas de l'algorithme.

Bibliographie

[1] A.M. Decaillot, *L'arithméticien Edouard Lucas (1842-1891) : théorie et instrumentation*, Revue d'histoire des mathématiques, 4, 1998, p. 191-236i.
[2] C.A. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Ed. Bulletin de la S.M.F., n°25, p.108, 1/12/1897.

Annexe : Grilles associées aux nombres pairs de 24 à 100

	21	19	17	15	13
	3	5	7	9	11
24					
	B			B	

	23	21	19	17	15	13
	3	5	7	9	11	13
26						

	25	23	21	19	17	15
	3	5	7	9	11	13
28			B			

	27	25	23	21	19	17	15
	3	5	7	9	11	13	15
30							
		B					B
	B			B			B

	29	27	25	23	21	19	17
	3	5	7	9	11	13	15
32							

	31	29	27	25	23	21	19	17
	3	5	7	9	11	13	15	17
34								

	33	31	29	27	25	23	21	19
	3	5	7	9	11	13	15	17
36				B				
	B			B			B	

	35	33	31	29	27	25	23	21	19
	3	5	7	9	11	13	15	17	19
38									

	37	35	33	31	29	27	25	23	21
	3	5	7	9	11	13	15	17	19
40									
		B					B		

	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
42										
			B							B
	B			B			B			B

	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
44										

	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
46											

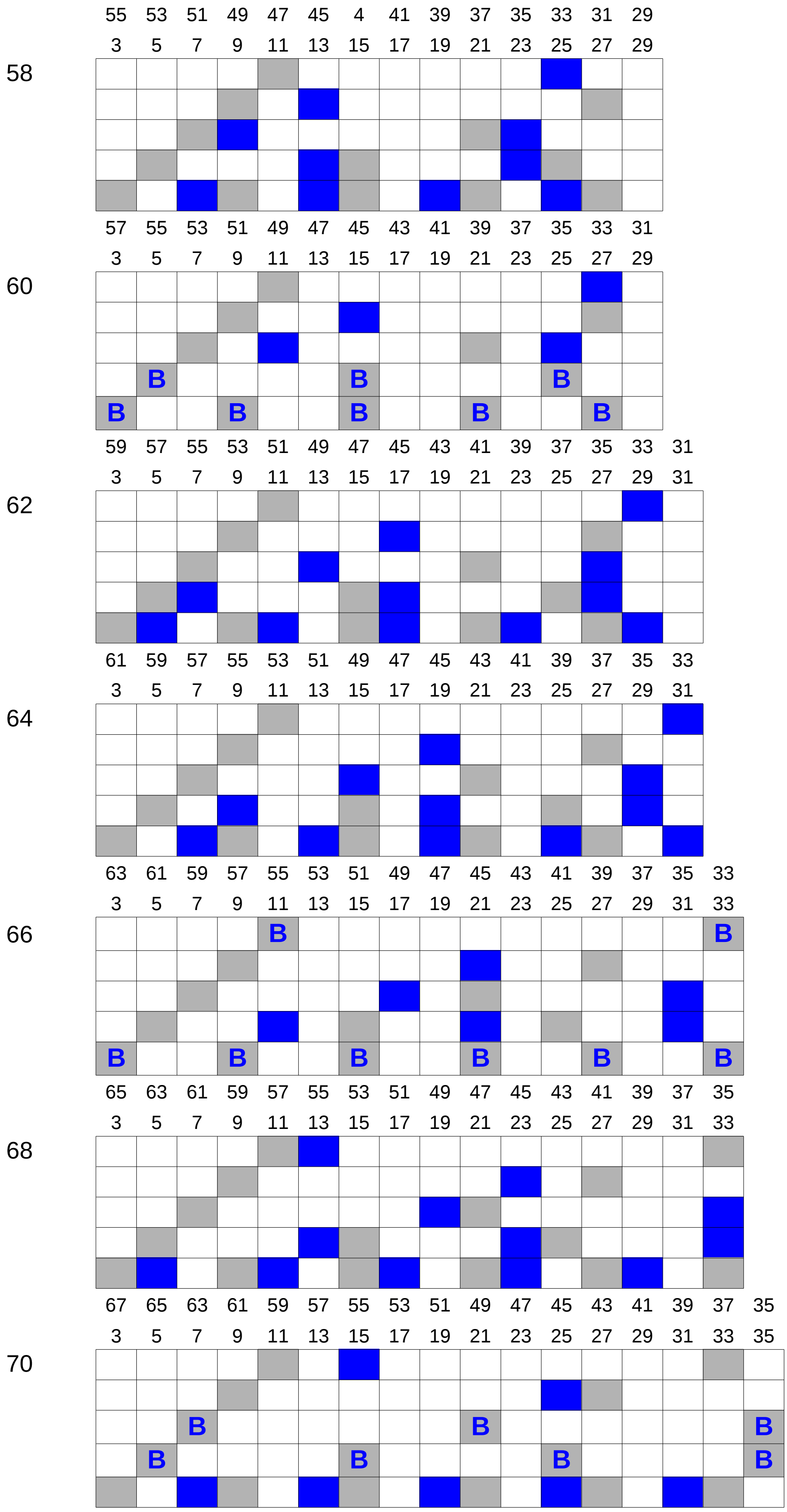
	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
48											
	B			B			B			B	

	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
50												
		B					B					B

	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
52												

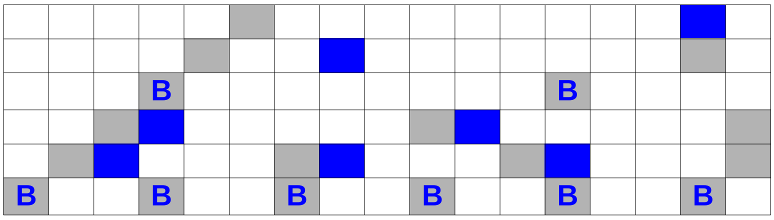
	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
54													
				B									B
	B			B			B			B			B

	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
56													
			B								B		


55 53 51 49 47 45 4 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29
58
57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29
60
B B B
B B B B B
59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31
62
61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31
64
63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33
66
B B
B B B B B B
65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33
68
67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
70
B B B
B B B B

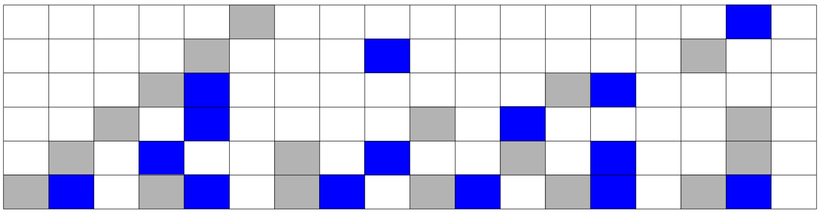
69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35

72



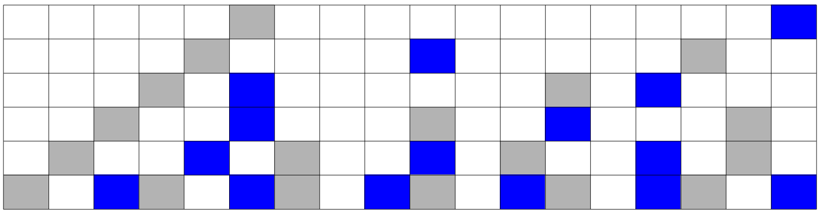
71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37

74



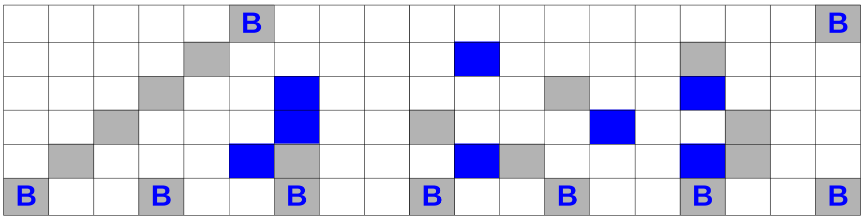
73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37

76



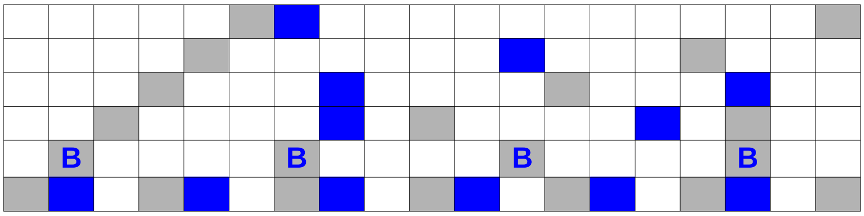
75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39

78



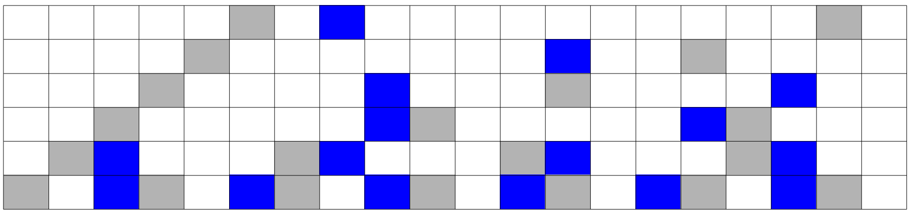
77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39

80



79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41

82



	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
84																				
			B							B							B			
	B			B			B			B			B			B			B	

	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43
86																					

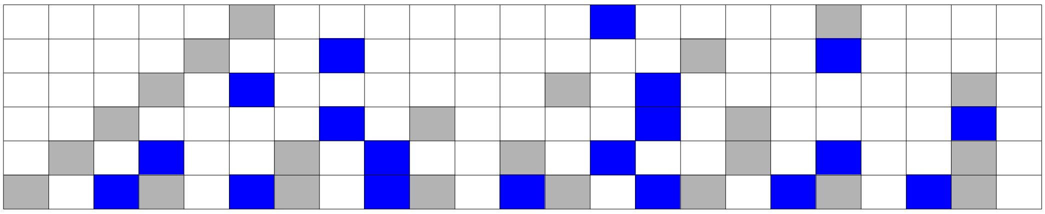
	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43
88																					
					B											B					

	87	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
90																						
				B									B									B
		B					B					B					B					B
	B			B			B			B			B			B			B			B

	89	87	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
92																						

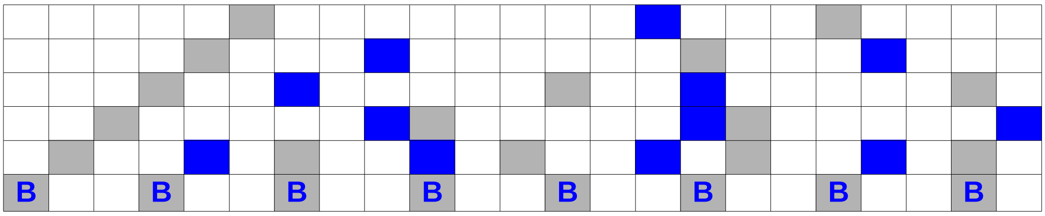
91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47

94



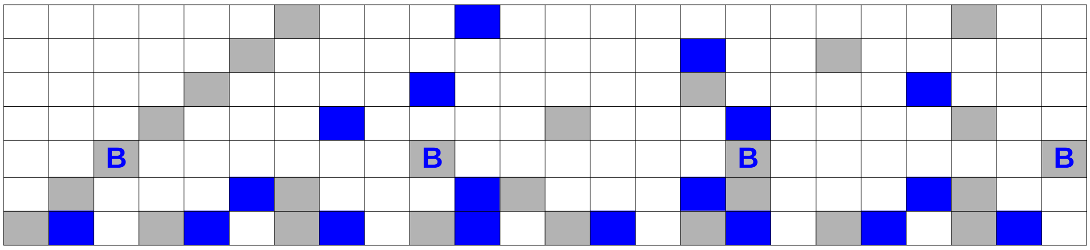
93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47

96



95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49

98



97 95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49

100