Discret / continu (DV, 16/7/2015)

On a proposé la fonction $sumsumcos(n)$ dont les zéros sont les nombres premiers

$$sumsumcos(n) = \sum_{b=2}^{n-1} \sum_{o=1}^{b} cos\left(\frac{2\pi no}{b}\right)$$

On souhaite calculer de telles doubles sommes en utilisant des matrices carrées M_n contenant des cosinus.
Considérons la matrice 10×10 :

$$M_{10} = \begin{pmatrix}
cos\frac{20\pi 1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi 1}{2} & cos\frac{20\pi 2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi 1}{3} & cos\frac{20\pi 2}{3} & cos\frac{20\pi 3}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi 1}{4} & cos\frac{20\pi 2}{4} & cos\frac{20\pi 3}{4} & cos\frac{20\pi 4}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi 1}{5} & cos\frac{20\pi 2}{5} & cos\frac{20\pi 3}{5} & cos\frac{20\pi 4}{5} & cos\frac{20\pi 5}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi 1}{6} & cos\frac{20\pi 2}{6} & cos\frac{20\pi 3}{6} & cos\frac{20\pi 4}{6} & cos\frac{20\pi 5}{6} & cos\frac{20\pi 6}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi 1}{7} & cos\frac{20\pi 2}{7} & cos\frac{20\pi 3}{7} & cos\frac{20\pi 4}{7} & cos\frac{20\pi 5}{7} & cos\frac{20\pi 6}{7} & cos\frac{20\pi 7}{7} & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi 1}{8} & cos\frac{20\pi 2}{8} & cos\frac{20\pi 3}{8} & cos\frac{20\pi 4}{8} & cos\frac{20\pi 5}{8} & cos\frac{20\pi 6}{8} & cos\frac{20\pi 7}{8} & cos\frac{20\pi 8}{8} & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi 1}{9} & cos\frac{20\pi 2}{9} & cos\frac{20\pi 3}{9} & cos\frac{20\pi 4}{9} & cos\frac{20\pi 5}{9} & cos\frac{20\pi 6}{9} & cos\frac{20\pi 7}{9} & cos\frac{20\pi 8}{9} & cos\frac{20\pi 9}{9} & 0 \\
cos\frac{20\pi 1}{10} & cos\frac{20\pi 2}{10} & cos\frac{20\pi 3}{10} & cos\frac{20\pi 4}{10} & cos\frac{20\pi 5}{10} & cos\frac{20\pi 6}{10} & cos\frac{20\pi 7}{10} & cos\frac{20\pi 8}{10} & cos\frac{20\pi 9}{10} & cos\frac{20\pi 10}{10}
\end{pmatrix}$$

La somme des éléments de la ligne d vaut d si $d \mid n$ et vaut 0 sinon.
La somme de tous les éléments de la matrice vaut donc $\sigma(n)$, qui est la somme des diviseurs de n.
Pour le calcul des éléments d'une ligne, connaissant le premier élément de la ligne, on utilise les polynômes de Tchebychev de première espèce $T_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$ définis par les relations

$$\begin{aligned}
&T_0 = 1 \\
&T_1 = X \\
&T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)
\end{aligned}$$

Chacun des éléments successifs d'une ligne est calculable en appliquant autant de fois que nécessaire la matrice $\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ au vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$.

M=$\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, M$^2 = \begin{pmatrix} 4x^2-1 & -2x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 8x^3-4x & -4x^2+1 \\ 4x^2-1 & -2x \end{pmatrix}$, $M^4 = \begin{pmatrix} 16x^4-12x^2+1 & -8x^3+4x \\ 8x^3-4x & -4x^2+1 \end{pmatrix}$

Si la matrice M_k (la puissance $k^{ième}$ de la matrice M) est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$, alors sa puissance $k+1^{ième}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 2ax+b & -a \\ a & b \end{pmatrix}$

Pour obtenir la somme de cosinus qui nous intéresse, il faut prendre la matrice initiale de cosinus M_{10}, la multiplier à gauche par une matrice d'inversion

$$Inv = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

et obtenir ainsi une matrice triangulaire avec un seul cosinus sur la dernière ligne.

$$InvM_{10} = \begin{pmatrix} cos\frac{20\pi 1}{10} & cos\frac{20\pi 2}{10} & cos\frac{20\pi 3}{10} & cos\frac{20\pi 4}{10} & cos\frac{20\pi 5}{10} & cos\frac{20\pi 6}{10} & cos\frac{20\pi 7}{10} & cos\frac{20\pi 8}{10} & cos\frac{20\pi 9}{10} & cos\frac{20\pi 10}{10} \\ cos\frac{20\pi 1}{9} & cos\frac{20\pi 2}{9} & cos\frac{20\pi 3}{9} & cos\frac{20\pi 4}{9} & cos\frac{20\pi 5}{9} & cos\frac{20\pi 6}{9} & cos\frac{20\pi 7}{9} & cos\frac{20\pi 8}{9} & cos\frac{20\pi 9}{9} & 0 \\ cos\frac{20\pi 1}{8} & cos\frac{20\pi 2}{8} & cos\frac{20\pi 3}{8} & cos\frac{20\pi 4}{8} & cos\frac{20\pi 5}{8} & cos\frac{20\pi 6}{8} & cos\frac{20\pi 7}{8} & cos\frac{20\pi 8}{8} & 0 & 0 \\ cos\frac{20\pi 1}{7} & cos\frac{20\pi 2}{7} & cos\frac{20\pi 3}{7} & cos\frac{20\pi 4}{7} & cos\frac{20\pi 5}{7} & cos\frac{20\pi 6}{7} & cos\frac{20\pi 7}{7} & 0 & 0 & 0 \\ cos\frac{20\pi 1}{6} & cos\frac{20\pi 2}{6} & cos\frac{20\pi 3}{6} & cos\frac{20\pi 4}{6} & cos\frac{20\pi 5}{6} & cos\frac{20\pi 6}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ cos\frac{20\pi 1}{5} & cos\frac{20\pi 2}{5} & cos\frac{20\pi 3}{5} & cos\frac{20\pi 4}{5} & cos\frac{20\pi 5}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ cos\frac{20\pi 1}{4} & cos\frac{20\pi 2}{4} & cos\frac{20\pi 3}{4} & cos\frac{20\pi 4}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ cos\frac{20\pi 1}{3} & cos\frac{20\pi 2}{3} & cos\frac{20\pi 3}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ cos\frac{20\pi 1}{2} & cos\frac{20\pi 2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ cos\frac{20\pi 1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, il convient de la multiplier à droite par une matrice triangulaire de 1

$$Tri = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cela permet d'obtenir sur la diagonale de la matrice résultat $InvM_{10}Tri$ les sommes partielles ligne par ligne. La trace de la matrice résultat (la somme de ses éléments diagonaux) fournit la somme des diviseurs de n.

Petite note concernant une matrice similaire à celle dont on doit chercher les puissances : la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est rigolote : par multiplication, elle ajoute. On a ainsi :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{pmatrix}$$