Divisions euclidiennes représentées par des matrices (Denise Vella-Chemla, 5.2.2019)

On continue d'étudier le fait que 98 ait 3 décomposants de Goldbach (19, 31 et 37), c'est-à-dire 3 nombres premiers dont le complément à 98 est premier aussi (79, 67, 61) mais on représente maintenant les nombres par des matrices 2×2 de coefficients dans les corps premiers $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

La matrice utilisée pour représenter 98 dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car $98 = 32 \times 3 + 2$ et $32 \equiv 2 \ (mod\ 3)$.

La matrice utilisée pour représenter 98 dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car $98 = 19 \times 5 + 3$ et $19 \equiv 4 \ (mod\ 5)$.

La matrice utilisée pour représenter 98 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car $98 = 14 \times 7 + 0$ et $14 \equiv 0 \ (mod\ 7)$.

Les matrices associées aux nombres impairs dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ reviennent cycliquement tous les 9 impairs, selon le cycle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots$$

De même, pour $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$), le cycle qui fait revenir identiquement les matrices pour représenter les nombres impairs successifs est de longueur 25 (resp. 49) puisqu'on a deux nombres, le quotient et le reste qui parcourent $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$).

Si l'on observe uniquement le quotient (en haut à gauche des matrices) dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, en effectuant bien la réduction modulo le nombre premier considéré, ici 3, sa variation suit le cycle

$$+0, +1, +1, +0, +1, +1, +0, +1, +1, \ldots$$

Si l'on observe uniquement le reste (en haut à droite des matrices), de nombre pair en nombre pair, naturellement, la variation est toujours

$$+2, +2, +2, \ldots$$

et ce quel que soit le corps considéré.

Si l'on observe uniquement le quotient (en haut à gauche des matrices) dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, en effectuant bien la réduction modulo 5, sa variation suit le cycle

$$+1, +0, +0, +1, +0, +1, +0, +0, +1, +0, +1, +0, \ldots$$

(qu'on peut résumer par le mot à 5 lettres 10010).
Si l'on observe uniquement le quotient (en haut à gauche des matrices) dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, en effectuant bien la réduction modulo 7, sa variation suit le cycle

$$+0, +1, +0, +0, +0, +1, +0, +0, +1, +0, +0, +0, \ldots$$

(qu'on peut résumer par le mot à 7 lettres 1000100).

Les décomposants de Goldbach de 98 ont, comme attendu, leur matrice qui ont un coefficient haut droit non nul, pour que le nombre en question soit un nombre premier supérieur à $\sqrt{98}$; pour que le complémentaire du décomposant de Goldbach soit premier aussi, les matrices de 98 et du décomposant dans chaque corps premier doivent avoir un coefficient haut droit différent, c'est-à-dire que 98 et un décomposant de Goldbach de 98 supérieur à $\sqrt{98}$, quel qu'il soit s'il existe, n'ont aucun reste de division euclidienne en commun lorsqu'on les divise par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{98}$.

Voici, pour bien comprendre les processus à l'œuvre, les matrices associées aux nombres impairs de 3 à 49, moitié de 98. Les décomposants de Goldbach sont indiqués en rouge.

		11	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	31	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	41	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$
			$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$
			$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	33	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	43	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$
	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$
	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	35	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	45	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$
	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$
7	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	37	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	47	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$
9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	39	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	49	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$
	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(dans\ \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$