Matrices et divisibilité

Denise Vella-Chemla

29 juillet 2015

1 Introduction

Dans cette note sont présentées deux méthodes qui utilisent le calcul matriciel pour calculer la somme des diviseurs des entiers et caractériser les nombres premiers.

2 Matrices et sommes de diviseurs

On est aussi émerveillé qu'Euler, lorsqu'il fournit dans l'article *"Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs"*, une formule par récurrence qui calcule la somme des diviseurs d'un nombre.

Voici la table de la somme des diviseurs des entiers de 1 à 100, présentée en section 4 de la note d'Euler.

$\sigma(1) = 1$	$\sigma(21) = 32$	$\sigma(41) = 42$	$\sigma(61) = 62$	$\sigma(81) = 121$
$\sigma(2) = 3$	$\sigma(22) = 36$	$\sigma(42) = 96$	$\sigma(62) = 96$	$\sigma(82) = 126$
$\sigma(3) = 4$	$\sigma(23) = 24$	$\sigma(43) = 44$	$\sigma(63) = 104$	$\sigma(83) = 84$
$\sigma(4) = 7$	$\sigma(24) = 60$	$\sigma(44) = 84$	$\sigma(64) = 127$	$\sigma(84) = 224$
$\sigma(5) = 6$	$\sigma(25) = 31$	$\sigma(45) = 78$	$\sigma(65) = 84$	$\sigma(85) = 108$
$\sigma(6) = 12$	$\sigma(26) = 42$	$\sigma(46) = 72$	$\sigma(66) = 144$	$\sigma(86) = 132$
$\sigma(7) = 8$	$\sigma(27) = 40$	$\sigma(47) = 48$	$\sigma(67) = 68$	$\sigma(87) = 120$
$\sigma(8) = 15$	$\sigma(28) = 56$	$\sigma(48) = 124$	$\sigma(68) = 126$	$\sigma(88) = 180$
$\sigma(9) = 13$	$\sigma(29) = 30$	$\sigma(49) = 57$	$\sigma(69) = 96$	$\sigma(89) = 90$
$\sigma(10) = 18$	$\sigma(30) = 72$	$\sigma(50) = 93$	$\sigma(70) = 144$	$\sigma(90) = 234$
$\sigma(11) = 12$	$\sigma(31) = 32$	$\sigma(51) = 72$	$\sigma(71) = 72$	$\sigma(91) = 112$
$\sigma(12) = 28$	$\sigma(32) = 63$	$\sigma(52) = 98$	$\sigma(72) = 195$	$\sigma(92) = 168$
$\sigma(13) = 14$	$\sigma(33) = 48$	$\sigma(53) = 54$	$\sigma(73) = 74$	$\sigma(93) = 128$
$\sigma(14) = 24$	$\sigma(34) = 54$	$\sigma(54) = 120$	$\sigma(74) = 114$	$\sigma(94) = 144$
$\sigma(15) = 24$	$\sigma(35) = 48$	$\sigma(55) = 72$	$\sigma(75) = 124$	$\sigma(95) = 120$
$\sigma(16) = 31$	$\sigma(36) = 91$	$\sigma(56) = 120$	$\sigma(76) = 140$	$\sigma(96) = 252$
$\sigma(17) = 18$	$\sigma(37) = 38$	$\sigma(57) = 80$	$\sigma(77) = 96$	$\sigma(97) = 98$
$\sigma(18) = 39$	$\sigma(38) = 60$	$\sigma(58) = 90$	$\sigma(78) = 168$	$\sigma(98) = 171$
$\sigma(19) = 20$	$\sigma(39) = 56$	$\sigma(59) = 60$	$\sigma(79) = 80$	$\sigma(99) = 156$
$\sigma(20) = 42$	$\sigma(40) = 90$	$\sigma(60) = 168$	$\sigma(80) = 186$	$\sigma(100) = 217$

Et voilà la formule de récurrence qu'il a trouvée.

$$\begin{cases} \sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) \\ \qquad\quad -\sigma(n-22) - \sigma(n-26) + \sigma(n-35) + \sigma(n-40 - \sigma(n-51) - \sigma(n-57) \\ \qquad\quad +\sigma(n-70) + \sigma(n-77) - \sigma(n-92) - \sigma(n-100) + etc. \\ \\ \sigma(0) = \sigma(1) = 1 \text{ et } \sigma(\text{n}) = 0 \text{ si n} < 0. \end{cases}$$

Pour p un nombre premier, $\sigma(p) = p + 1$.

On propose de calculer la somme des diviseurs par multiplication matricielle.

Appelons $M = (m_{nd})$ la matrice carrée d'entiers de taille $n \times n$ qui contient les éléments $m_{nd} = d$ si $d \mid n$ et $m_{nd} = 0$ sinon.

Voici M pour $n = 10$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \boxed{3} & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Le nombre 3 encadré correspond à $3 \mid 6$.

$\sigma(10) = 18$ est la somme des éléments de la dernière ligne de M.

Multiplions M par la matrice U "pleine de 1".

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = MU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

La matrice S présente l'intérêt d'avoir sur sa diagonale pour un entier i donné la somme de ses diviseurs $S_{i,i} = \sigma(i)$.

3 Matrice booléenne de divisibilité

Dans cette seconde approche, qui est la transposition en écriture matricielle du crible d'Eratosthène, on utilise une matrice de divisibilité, pour les nombres entiers supérieurs strictement à 1. Elle fait apparaître les diviseurs d'un entier n dits non-triviaux, i.e. différents de 1 et de n.

Appelons $M' = (m'_{nd})$ la matrice carrée d'entiers de taille $n \times n$ qui contient les éléments $m'_{nd} = 1$ si $d+1 \mid n+1$ et $d+1 \neq n+1$ et $m_{nd} = 0$ sinon.

Voici M', de taille 9×9, fournissant les diviseurs non-triviaux des entiers de 2 à 10.

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le nombre 1 encadré correspond à $3 \mid 6$.

Un nombre premier n'a aucun diviseur non-trivial, sa ligne ne contient que des 0, un nombre composé en a au moins 1, sa ligne contient un 1 au moins.

Définissons deux matrices utiles : Z le vecteur colonne nul et N la matrice carrée contenant les nombres entiers successifs, sauf 1, sur sa diagonale.

$$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

On définit le produit booléen de 2 matrices, qui s'effectue comme le produit matriciel habituel mais en effectuant des disjonctions de disjonctions booléennes :

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit booléen (noté $\vee$) $C = A \vee B$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \vee b_{kj}$$

Le produit booléen de M' par un vecteur colonne nul Z permet d'obtenir un vecteur colonne P contenant des 0 aux positions des nombres premiers.

$$P = M' \vee Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce vecteur colonne P, dont on prend la négation $\neg P$, multiplié selon la multiplication matricielle habituelle par la matrice carrée N permet d'obtenir la matrice S' suivante dont l'élément diagonal $S'_{i,i} = i$ si i est premier et $S'_{i,i} = 0$ sinon.

$$S' = N \neg P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bibliographie

[1] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Bibliothèque impartiale 3, 1751, S. 10-31. In : Opera omnia (1) 2, Leipzig, Berlin 1915, S. 241-253 (E 175).