Matrices gigognes (Denise Vella-Chemla, 8.4.2016)

Cette note reprend simplement les matrices de la note Transitions ; elles sont gigognes du fait des produits qui opèrent tous les possibles.

Pour les transitions *"un pair succède à un impair, un impair succède à un pair"*, on a cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On omet le 1/2 devant.

On code les transitions *"un divisible par 3 est suivi par un non-divisible par 3 tandis qu'un non-divisible par 3 peut être suivi à égales proportions par un divisible ou par un non-divisible par 3"* par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les transitions pour la divisibilité par 5 sont notées dans la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Les transitions pour la divisibilité par 7 sont notées dans la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Le produit tensoriel des 2 premières matrices vaut :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit des 3 premières matrices est égal à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Le produit des 4 premières matrices est égal à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 15 & 1 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Oublier la parité (divisibilité par 2) permet d'obtenir des matrices plus aisées à appréhender, les occurrences des nombres sont bien parallèles à la diagonale principale (ci-dessous, la matrice du produit des divisibilités par 3, 5, et 7).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 15 & 1 & 5 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$