Matrices pour la somme des diviseurs d'Euler, version simplifiée (Denise Vella-Chemla, 27.10.2017)

On souhaite "voir la primalité" en effectuant un calcul matriciel.

Appelons $M = (m_{ij})$ la matrice infinie d'entiers définie par $M_{ij} = j$ si $j \mid i$ et $M_{ij} = 0$ sinon.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & \boxed{3} & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Appelons N une matrice colonne dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément de la première ligne qui vaut 1.

$$N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Appelons P une matrice colonne contenant les entiers successifs à partir de 1.

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Alors $M^2N - P$ est une matrice colonne de nombres B_i telle que $B_i = 1$ si et seulement si i est premier et qui est strictement supérieur à 1 sinon (sauf $B_1 = 0$).
En effet, élever M au carré permet d'obtenir en première colonne le cumul (la somme) des diviseurs de chaque entier.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 7 & 12 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 12 & 16 & 27 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & \dots \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 0 & \dots \\ 15 & 28 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 64 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Un nombre p étant premier si sa somme des diviseurs vaut $p+1$, la soustraction de la colonne d'entiers sucessifs de la première colonne de M^2, qui contient pour chaque entier la somme de ses diviseurs, permet d'obtenir 1 comme image des nombres premiers et d'eux seulement (un nombre composé (sauf 1) a une somme de diviseurs strictement supérieure à son successeur au sens de Peano).

$$M^2N - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 7 & 12 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 12 & 16 & 27 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & \dots \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 0 & \dots \\ 15 & 28 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 64 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \\ 15 \\ \vdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \\ 7 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Bibliographie

[1] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Bibliothèque impartiale 3, 1751, S. 10-31. In : Opera omnia (1) 2, Leipzig, Berlin 1915, S. 241-253 (E 175).