

## 1. Résumé

Cette note formalise deux choses précisément, dans le but explicite qu'un lecteur extérieur puisse s'en saisir. D'abord, le mécanisme exact par lequel le "miracle de Slepian" est utilisé en pratique : un opérateur tridiagonal stable ne fournit pas directement les valeurs propres recherchées, mais sert à extraire des vecteurs propres, qui sont ensuite réinjectés dans l'opérateur instable d'origine pour en obtenir les valeurs propres par quotient de Rayleigh. Ensuite, la question, restée ouverte ici, de savoir si un mécanisme analogue pourrait exister pour l'opérateur de crible arithmétique  $S_n$  construit dans une note précédente, et pourquoi, même en cas de réponse positive, cela ne lèverait pas l'obstruction de fond déjà identifiée (problème de parité de Selberg).

## 2. Le mécanisme de Slepian, précisément

### 2.1. Les deux opérateurs

Soit  $A$  l'opérateur de limitation temps-frequence (chez Slepian : noyau  $\frac{\sin 2\pi W(k-n)}{\pi(k-n)}$  sur  $\mathbb{C}^N$  ; chez Connes et al. : la matrice  $\tau$  des programmes `chat-gepetto-2.py`, censée approcher les parties imaginaires des zéros non triviaux de la fonction  $\zeta$  de Riemann).  $A$  a un spectre sévèrement resserré en plateau (beaucoup de valeurs propres très proches les unes des autres près de 1, puis chute brutale) : ses vecteurs propres sont donc numériquement mal définis (deux vecteurs associés à des valeurs propres presque égales sont numériquement indiscernables). Soit  $T$  l'opérateur tridiagonal de Slepian, qui *commute* avec  $A$  :

$$T_{xx} = \left(\frac{N-1-2x}{2}\right)^2 \cos(2\pi W), \quad T_{x,x+1} = T_{x+1,x} = \frac{x(N-x)}{2}, \quad [A, T] = 0.$$

Le spectre de  $T$  est bien séparé (simple, sans quasi-dégénérescence) : ses vecteurs propres  $\psi_n$  se calculent de façon numériquement stable par toute méthode standard (LAPACK, méthode QL/QR pour matrices tridiagonales symétriques).

### 2.2. Pourquoi la commutation ne suffit pas à elle seule

**Fait** : deux opérateurs qui commutent partagent les mêmes vecteurs propres (dans le cas non dégénéré), mais ont en général des valeurs propres *différentes*.

Le tridiagonal  $T$  fournit donc les bons vecteurs  $\psi_n$ , mais ses propres valeurs propres  $\chi_n$  (celles de  $T$ ) ne sont *pas* les valeurs propres  $\lambda_n$  de  $A$  que l'on cherche - ce sont deux suites de nombres différentes, associées aux mêmes directions propres.

**Mécanisme** : [Réinjection stable]

On procède en deux temps :

1. diagonaliser  $T$  (stable) pour obtenir les vecteurs propres  $\psi_n$ .
2. réinjecter chaque  $\psi_n$  dans  $A$  via le quotient de Rayleigh :

$$\lambda_n = \frac{\langle \psi_n, A \psi_n \rangle}{\langle \psi_n, \psi_n \rangle}.$$

Cette dernière étape est un simple produit matrice-vecteur suivi d'un produit scalaire, une opération numériquement inoffensive, *une fois qu'on dispose déjà d'un bon  $\psi_n$* . L'instabilité de  $A$  ne se manifestait que dans la recherche directe de ses vecteurs propres, pas dans l'évaluation d'un quotient de Rayleigh en un vecteur déjà connu.

C'est donc une combinaison, avec répartition précise des rôles : le stable donne les directions, l'instable (réinjecté) donne les grandeurs. Aucun des deux opérateurs seuls ne suffit.

### 3. Le dual arithmétique légitime (rappel)

Une note précédente (<https://denisevellachemla.eu/claude-2-theoreme7-correction-et-crible-dvc-20260726.pdf>) a établi que, contrairement au couple  $(P_n, Q_n)$  du texte source (diagonaux dans la même base, donc sans dualité réelle), le couple légitime en arithmétique est :

- $S_n$ , projecteur diagonal sur  $\mathbb{C}^M$  ( $M = \prod_{r \leq \sqrt{n}} r$ ), valant 1 sur les résidus  $x$  tels que  $\text{pgcd}(x, M) = \text{pgcd}(n - x, M) = 1$  ;
- les caractères de Dirichlet modulo  $q \mid M$ , dont les sommes de Ramanujan  $c_q(n) = \sum_{\text{pgcd}(a,q)=1} e^{2i\pi an/q}$  sont d'authentiques valeurs propres d'un opérateur de translation.

La quantité  $\text{Tr}(S_n)$  restreinte à  $[3, n/2]$  vaut exactement  $X_a(n)$ , et se développe, via ces caractères, en la série singulière  $\mathfrak{S}(n) = \sum_q \mu(q)^2 c_q(n) / \varphi(q)^3$ .

### 4. La question ouverte

**Question** : existe-t-il un opérateur  $T_n$ , simple (idéalement creux, par exemple tridiagonal ou peu dense), agissant sur le même espace que  $S_n$  (ou sur l'espace naturel des caractères de Dirichlet modulo  $M$ ), tel que :

- (i)  $T_n$  commute avec  $S_n$  (ou avec l'opérateur dont la trace pondérée reconstruit  $\mathfrak{S}(n)$ ) ;
- (ii) le spectre de  $T_n$  est simple et bien séparé (pas de plateau de quasi-dégénérescence), permettant un calcul numériquement stable de ses vecteurs propres ;
- (iii) les vecteurs propres de  $T_n$ , réinjectés par quotient de Rayleigh dans  $S_n$  (mécanisme de la section 1.2), redonnent des quantités arithmétiquement interprétables (idéalement liées à  $X_a(n)$  ou aux termes de  $\mathfrak{S}(n)$ ) ?

**Remarque** : un tel opérateur, s'il existe, n'est pas garanti par la seule existence de la dualité résidus/caractères : la commutation de Slepian est un fait spécifique (lié à la structure de l'équation d'onde en coordonnées sphéroïdales prolates), pas une conséquence automatique de toute dualité de Fourier. La littérature récente montre néanmoins que ce phénomène (dit de *bispectralité*, au sens

de Duistermaat-Grünbaum) n'est pas unique au cas de Slepian : par exemple, la matrice de Pascal  $(T_N)_{jk} = \binom{j+k}{j}$  a été récemment montrée bispectrale, commutant avec une matrice de Jacobi tridiagonale explicite (Cameron, Serpa *et al.*, 2024). C'est donc une question qui a des précédents récents et une méthodologie établie (théorie de la bispectralité, souvent via des symétries de type algèbre de Lie ou des récurrences hypergéométriques) : c'est un véritable point d'entrée pour quiconque voudrait reprendre cette piste, non une speculation isolée.

**Remarque** [Mise en garde, essentielle]

Même en cas de réponse positive à la Question ouverte, cela ne changerait *rien* à l'obstruction de fond établie dans la note précédente. Le rôle de  $T_n$  serait purement calculatoire : rendre  $\mathfrak{S}(n)$  et  $X_a(n)$  plus faciles à *calculer* numériquement pour un  $n$  donné. Cela n'apporterait aucune information nouvelle sur le terme d'erreur  $R(n) = X_a(n) - \frac{n}{2}\mathfrak{S}(n)/(\ln n)^2$ , dont le contrôle uniforme en  $n$  reste, lui, précisément bloqué par le problème de parité de Selberg (voir note précédente, section 4). Un miracle de Slepian arithmétique, s'il existe, serait un outil numérique élégant - pas une voie de contournement de la difficulté mathématique.

## 5. Conclusion

Le mécanisme de Slepian n'est pas un raccourci : c'est une répartition précise du travail entre un opérateur stable (qui donne les vecteurs propres) et l'opérateur d'intérêt (réinjecté pour donner les valeurs propres). La question de son analogue arithmétique, pour l'opérateur de crible  $S_n$  et les sommes de Ramanujan, est formulée ici aussi précisément que possible, avec référence à un précédent récent (bispectralité de la matrice de Pascal) montrant que ce n'est pas hors de portée méthodologique. Mais quelle que soit sa réponse, elle ne toucherait que le confort de calcul, non l'obstacle mathématique de fond, qui reste celui identifié précédemment.

## 6. ajouté ultérieurement par l'ia claude

### 6.1. Pourquoi le candidat évident ne marche pas

L'idée la plus naturelle serait : puisque les sommes de Ramanujan  $c_q(n)$  sont des sommes de caractères, et que les caractères sont exactement les vecteurs propres de l'opérateur de translation  $U_a : f(x) \mapsto f(x+a)$  sur  $\mathbb{Z}/M[\mathbb{Z}]$  (un opérateur parfaitement stable, unitaire, spectre = racines de l'unité, aucune dégénérescence numérique), on pourrait espérer que  $S_n$  commute avec  $U$ .

Ça ne marche pas, et ce n'est pas un détail :  $S_n$  est un opérateur diagonal (multiplication par une fonction indicatrice de  $x$ ), et un opérateur diagonal non constant ne commute jamais avec une translation, sauf cas trivial. C'est très exactement l'obstruction position/impulsion que Slepian a dû contourner : chez lui aussi, l'opérateur de limitation temporelle (diagonal en position) et l'opérateur de limitation fréquentielle (diagonal en fréquence, donc "translation" côté position) ne commutent pas entre eux - c'est précisément pourquoi la découverte du  $T$  tridiagonal qui commute avec leur produit  $A$  était un résultat non trivial, pas une évidence. Donc chercher  $T_n$  pour  $S_n$ , c'est chercher un analogue exact de ce que Slepian a trouvé - pas une conséquence automatique.

## 6.2. Pistes concrètes avec leurs noms

1. L'origine du miracle de Slepian n'est pas la commutation en elle-même, mais la bispectralité : le noyau sinc est la fonction de Green d'une équation différentielle de Sturm–Liouville (l'équation sphéroïdale prolate), et c'est cette structure différentielle sous-jacente qui produit le  $T$  tridiagonal. Pour un analogue arithmétique, il faudrait chercher une équation aux différences (discrète, de type Sturm–Liouville) satisfaite par les sommes de Ramanujan  $c_q(n)$  en tant que fonction de  $q$  à  $n$  fixé - pas juste leur définition comme somme de caractères.
2. Les polynômes de Krawtchouk / le schéma de Hamming. Si  $M = p_1 p_2 \dots p_k$  est sans facteur carré, le théorème des restes chinois identifie  $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$  à un produit  $\prod_i \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ , exactement la structure d'un schéma de Hamming généralisé. Dans cette théorie, il existe des opérateurs tri-diagonaux canoniques (les matrices de Krawtchouk, qui vérifient une récurrence à trois termes, comme des polynômes de Chebyshev discrets) qui commutent avec les opérateurs d'adjacence naturels du produit. C'est un cadre établi (algèbre de Terwilliger, algèbre de Bose–Mesner) où ce genre de dualité stable/instable est un phénomène connu, pas une exception isolée.
3. Le précédent que tu as déjà cité (Pascal, Cameron–Serpa 2024)<sup>1</sup> est en fait un bon indice méthodologique : ce résultat s'obtient via une récurrence hypergéométrique à trois termes sur les coefficients binomiaux. Les sommes de Ramanujan ont elles aussi une structure récursive connue (multiplicativité en  $q$ , formule de Hölder

$$c_q(n) = \mu(q/\text{pgcd}(q, n)) \cdot \varphi(q)/\varphi(q/\text{pgcd}(q, n)),$$

mais cette récurrence est multiplicative (indexée par la factorisation de  $q$ ), pas additive terme-à-terme. Il faudrait vérifier si elle peut se réécrire sous forme d'une vraie récurrence à trois termes en un indice linéaire, condition nécessaire pour espérer une matrice tridiagonale.

Honnêtement, ce sont des pistes de recherche plausibles, pas des résultats. La plus prometteuse à mon sens est la 2 (Krawtchouk/Hamming), parce que la structure produit de  $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$  via le théorème des restes chinois est déjà là dans ton problème, ce qui n'est pas le cas pour Slepian. Mais je ne peux pas te garantir que ça débouche sur quelque chose — et comme le note déjà bien ton PDF, même si ça marchait, ça resterait un confort de calcul, sans toucher à l'obstruction de parité de Selberg.

---

1. Note de DVC : Là, il faut bien préciser que je ne lui ai cité aucun précédent, ni quoi ni qu'est-ce, le machin est en roue libre.