

1. Le produit local

Pour un entier pair n , soit $G(n)$ le nombre de décompositions de Goldbach non ordonnées, diagonale comprise :

$$n = p + q, \quad p \leq q, \quad p, q \text{ premiers.}$$

Pour un nombre premier impair q , si $q \nmid n$, les deux classes

$$a \equiv 0 \pmod{q}, \quad a \equiv n \pmod{q}$$

sont distinctes. Deux classes sont donc interdites parmi les q classes possibles, et la proportion locale de classes survivantes est

$$\frac{q-2}{q}.$$

Si $q \mid n$, les deux classes interdites coïncident, et la proportion devient

$$\frac{q-1}{q}.$$

On définit

$$B(n) = \prod_{\substack{q \leq \sqrt{n} \\ q \nmid n}} \frac{q-2}{q}, \quad C(n) = \prod_{\substack{q \mid n \\ q > 2}} \frac{q-1}{q-2},$$

et

$$L(n) = B(n)C(n).$$

Le quotient étudié est

$$R(n) = \frac{G(n)}{nB(n)C(n)} = \frac{G(n)}{nL(n)}.$$

2. Résultat général

Un calcul direct jusqu'à $n = 100000$ donne pour $R(n)$ les médianes :

intervalle	med $R(n)$
de 100 à 1000	0.2944
de 1000 à 5000	0.2722
de 5000 à 10000	0.2632
de 10000 à 50000	0.2522
de 50000 à 100000	0.2465

Le quotient décroît donc lentement et devient progressivement plus stable.

Pour $n = 1000, 10000, 100000$, on obtient respectivement environ

$$0.3382, \quad 0.2487, \quad 0.2468.$$

3. Échelle asymptotique

Pour les nombres premiers impairs,

$$1 - \frac{2}{p} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}.$$

Le produit

$$\prod_{p>2} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} = C_2$$

est la constante des nombres premiers jumeaux. Avec Mertens,

$$\prod_{\substack{p \leq x \\ p > 2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \sim \frac{4e^{-2\gamma}}{\log^2 x},$$

et donc, avec $x = \sqrt{n}$,

$$B(n) \sim \frac{16C_2 e^{-2\gamma}}{\log^2 n}.$$

L'heuristique de Hardy-Littlewood donne

$$G(n) \sim C_2 \frac{n}{\log^2 n} C(n),$$

d'où la valeur attendue

$$R(n) \longrightarrow \frac{e^{2\gamma}}{16} \simeq 0.1982637.$$

Cette limite est une comparaison heuristique et ne constitue pas une preuve.

4. Test des familles $2p$, $2p^2$ et $4p$

Nous avons testé, jusqu'à

$$n = 300000,$$

les trois familles

$$n = 2p, \quad n = 2p^2, \quad n = 4p,$$

avec p premier impair, en utilisant exactement le même quotient $R(n)$.

Pour $n \geq 100$, les médianes sont :

famille	med $R(n)$
$2p$	0.24304
$2p^2$	0.24395
$4p$	0.24288

Les médianes sont donc très proches. Les moyennes correspondantes sont approximativement

$$0.24584, \quad 0.24718, \quad 0.24532.$$

4.1. Évolution par tranches

intervalle	$2p$	$2p^2$	$4p$
de 100 à 1000	0.32117	0.27636	0.29647
de 1000 à 5000	0.27904	0.25408	0.27552
de 5000 à 10000	0.26558	0.24705	0.26281
de 10000 à 50000	0.25294	0.25061	0.25239
de 50000 à 100000	0.24681	0.24388	0.24683
de 100000 à 300000	0.24103	0.23943	0.24090

Le rapprochement des trois colonnes est net dans les grandes tranches. Il ne ressort donc pas de cette expérience qu'une des trois formes multiplicatives soit systématiquement défavorisée.

5. Minima dans les trois familles

Les minima obtenus, pour $n \geq 100$, sont :

famille	n	p	$R(n)$
$2p$	9602	4801	0.20935
$2p^2$	53138	163	0.22909
$4p$	332	83	0.20457

Le cas $4p$ donne donc effectivement un minimum très bas à petite échelle, mais les calculs ne montrent pas que les $4p$ restent systématiquement les plus mauvais cas lorsque n augmente.

6. Le cas $68 = 4 \cdot 17$

Pour

$$68 = 4 \cdot 17$$

on trouve

$$G(68) = 2,$$

avec les deux décompositions

$$68 = 7 + 61 = 31 + 37.$$

Le quotient normalisé vaut

$$R(68) \simeq 0.1930147.$$

Il est donc très proche de la valeur asymptotique heuristique

$$\frac{e^{2\gamma}}{16} \simeq 0.1982637.$$

Le faible nombre de représentations de 68 est ainsi compatible avec la normalisation par le produit local ; il ne suffit pas à faire apparaître 68 comme une anomalie structurelle.

7. Test complémentaire : les vrais minima de $R(n)$

Afin de ne pas supposer à l'avance que les minima doivent appartenir à $2p$, $2p^2$ ou $4p$, nous avons aussi recherché les plus petites valeurs de $R(n)$ parmi *tous* les nombres pairs dans plusieurs intervalles.

Les dix premiers minima de chaque tranche commencent ainsi :

tranche	n	$R(n)$
de 100 à 1000	128	0.20052
de 1000 à 10000	2672	0.20422
de 10000 à 100000	26054	0.22216
de 100000 à 300000	144128	0.22379

Les minima globaux des tranches remontent donc après les premières valeurs de n : ils ne continuent pas à descendre vers zéro.

Plus précisément, dans la première tranche, le minimum est atteint en $n = 128$, et non en $4p$. Dans la tranche 1000-10000, le minimum est $n = 2672$. Dans 10000-100000, il est $n = 26054$, et dans 100000-300000, il est $n = 144128$.¹

Ce test est important : les minima ne semblent pas être expliqués simplement par l'appartenance à l'une des trois familles étudiées.

8. Bilan

Le résultat expérimental le plus robuste est la stabilité de l'échelle de

$$R(n) = \frac{G(n)}{nB(n)C(n)}.$$

Les familles $2p$, $2p^2$ et $4p$ ont des médianes presque identiques sur l'ensemble testé, et leur comportement se rapproche encore dans les grandes tranches.

Le cas 68 est intéressant parce que

$$R(68) \simeq 0.1930$$

est très proche de

$$\frac{e^{2\gamma}}{16} \simeq 0.1983,$$

mais il ne permet pas à lui seul d'identifier une famille exceptionnelle.

La recherche des vrais minima montre en outre que les plus petites valeurs ne sont pas systématiquement portées par les $4p$, ni par les $2p$, ni par les $2p^2$.

1. $128 = 2^7$; $2672 = 2^4 \cdot 167$; $26054 = 2 \cdot 7 \cdot 1861$; $144128 = 2^8 \cdot 563$.

Le phénomène observé reste donc compatible avec l'idée que le produit

$$B(n)C(n)$$

capture une composante locale importante de la structure de Goldbach, tandis que le facteur restant

$$R(n)$$

présente une échelle beaucoup plus universelle.

Une borne uniforme

$$G(n) \geq c n B(n) C(n)$$

avec $c > 0$ indépendant de n , valable pour tous les n suffisamment grands, suffirait à établir Goldbach pour les grands n . Les calculs numériques présents ici ne fournissent pas cette borne.