Conjecture de Goldbach et nullité du déterminant d'une matrice de Sylvester

Denise Vella-Chemla

25/12/2011

La conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers. Trouver les décomposants de Goldbach d'un nombre pair n équivaut à trouver les racines communes de deux polynômes : le premier polynôme a pour seules racines les nombres premiers impairs inférieurs ou égaux à n ; le second polynôme a pour seules racines leur complémentaire à n. Par exemple, trouver les décomposants de Goldbach de 6 consiste à trouver les racines communes des polynômes $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$, et $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

Les coefficients et les racines des deux polynômes vérifient les équations de Viète : dans le cas général d'un polynôme unitaire $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_o$:

$x_1 + x_2 + ... + x_n = -a_{n-1}$
$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = a_{n-2}$ (*somme de tous les produits* 2 *à* 2)
$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_{n-3}$ (*somme de tous les produits* 3 *à* 3)
...
$x_1x_2...x_k + x_1x_2...x_{k+1} + ... + x_{n-k}x_{n-k+1}...x_n = (-1)^k a_{n-k}$ (*somme de tous les produits k à k*)
...
$x_1x_2...x_n = (-1)^n a_o$.

Les coefficients du deuxième polynôme sont les coefficients du développement de Taylor du premier polynôme. Dans le cas du nombre pair $n = 6$, les coefficients du premier polynôme sont $a_1 = 1, a_2 = -8, a_3 = 15$. Les coefficients du deuxième polynôme sont :

$$b_1 = a_1,$$
$$b_2 = -2a_1n - a_2,$$
$$b_3 = a_1n^2 + a_2n + a_3.$$

Deux polynômes ont des racines communes si leur résultant (le déterminant de leur matrice de Sylvester) est nul.

On rappelle que la matrice de Sylvester de $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ et $Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$ est :

$$\begin{pmatrix}
a_0 & 0 & \ldots & 0 & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\
a_1 & a_0 & \ddots & 0 & b_1 & b_0 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\
a_n & \vdots & \ddots & \vdots & b_n & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_n & \vdots & \vdots & 0 & b_n & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & a_n & 0 & \ldots & 0 & b_n
\end{pmatrix}$$

Dans le cas $n = 6$, exprimons le résultant uniquement en fonction des coefficients du premier polynôme. Peut-être cela nous permettra-t-il de comprendre pourquoi il est nul.

Le résultant des deux polynômes dans le cas où $n = 6$ est égal à :

$$n^4 a_1^4 + 4n^3 a_1^3 a_2 + 4n^2 a_1^3 a_3 + 5n^2 a_1^2 a_2^2 + 8na_1^2 a_2 a_3 + 2na_1 a_2^3 + 4a_1 a_2^2 a_3$$

Si l'on remplace n par 6, a_1 par 1, a_2 par -8 et a_3 par 15, on obtient :

$$6^4 + 4.6^3.(-8) + 4.6^2.15 + 5.6^2.(-8)^2 + 8.6.(-8).15 + 2.6.(-8)^3 + 4.(-8)^2.15$$

qui est égal à :

$$1296 - 6912 + 2160 + 11520 - 5760 - 6144 + 3840$$

qui est bien nul.

Qu'est-ce qui se joue entre les différents nombres pour que le résultant soit finalement nul ? Voyons si en écrivant les factorisations des nombres intervenant dans la somme, cela s'éclaire ?

$$2^4.3^4 - 2^8.3^3 + 2^4.3^3.5 + 2^8.3^2.5 - 2^7.3^2.5 - 2^{11}.3 + 2^8.3.5$$

On se demande si une telle modélisation de la Conjecture de Goldbach peut améliorer sa compréhension.