Note de conclusion, Denise Vella-Chemla pilotant lumo, septembre 2026

Cette note revient sur un chemin suivi en février 2006 ("Fractales, symétries et conjecture de Goldbach"). Elle n'affirme pas un échec : elle cartographie le bord exact du petit espace étudié, et justifie de s'arrêter de suivre ce chemin.

1. La loi miroir

Soit n un nombre pair, p un nombre premier tel que $p \leq \sqrt{n}$, et $\sigma : x \mapsto n - x$ l'involution qui à un entier associe son complémentaire dans n. Alors, pour tout x :

- si $p \mid n$, alors $p \mid x \iff p \mid n - x$: les statuts de x et de $n - x$ modulo p sont **identiques** (tout ou rien) ;
- si $p \nmid n$, les statuts sont **opposés** : exactement l'un des deux est divisible par p.

(Preuve immédiate : $x \equiv 0 \pmod p \iff n - x \equiv n \equiv 0 \pmod p$ si $p \mid n$; et $x \equiv 0 \pmod p \iff n - x \not\equiv 0 \pmod p$ si $p \nmid n$).

C'est la version arithmétique du tableau des valuations p-adiques de $x + y$ et $x - y$ connaissant celles de x et y, et le moteur des sous-séquences palindromes observées dès février 2006.

2. Ce que le crible décompte exactement - et pourquoi on n'a de connaissance que jusqu'à une primorielle

Sur une période complète de longueur $P = \prod_{p \leq \sqrt{n}} p$ (la primorielle), la formule

$$\nu(n) \sim \frac{n}{4} \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ 3 \leq p \leq \sqrt{n} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ 3 \leq p \leq \sqrt{n} \\ p \nmid n}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \tag{1}$$

est une valeur **exacte** du nombre de nombres qui réussissent à traverser le crible : les classes de congruences se répartissent périodiquement et l'inclusion-exclusion ne comporte aucun terme d'arrondi. C'est la formule que j'avais trouvée en 2019-2022, et dont j'ai découvert l'analogue sur la toile bien plus tard (en 2026), dans un texte de G. H. Hardy (1922, formule (12), qui parle du "crible de Merlin"[1]) et, dans une phrase d'un texte de Mirsky (1958), qui en parle comme d'une adaptation du crible de Brun.

Mais n n'a aucune raison d'être un multiple de P, et $P \approx e^{\sqrt{n}}$ est immensément plus grand que n.

1. Ce crible de Merlin apparaît dans une note soumise en 1911 par M. Merlin à l'Académie des sciences et présentée par Henri Poincaré ; Merlin mourut pendant la guerre de 1914–1918, et Brun, dans *Le crible d'Ératosthène et le théorème de Goldbach* (1920), créditera cette note de l'idée de l'"emploi double" du crible d'Ératosthène ; petite note historique : le "crible de Merlin" est l'appellation qu'emploie Hardy (*Goldbach's Theorem*, Matematisk Tidsskrift B, 1922, p. 5 et p. 7) pour le double crible appliqué au tableau $m + m' = n$. Il renvoie à une note de Jean Merlin, jeune mathématicien français mort pendant la guerre de 1914-1918, soumise par Henri Poincaré en son nom ; Cette appellation de "crible de Merlin" a disparu de la terminologie moderne, ce qui explique sa rareté sur la toile.

Le crible de Legendre exact sur $[1, n]$ s'écrit

$$|R_n| \;=\; \sum_{d|P} \mu(d)^2 \left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \pm O(1) \right),$$

et l'erreur cumulée, en $O(2^{\pi(\sqrt{n})})$, croît comme $e^{c\sqrt{n}/\ln n}$: exponentiellement plus vite que le terme principal $n/(\ln n)^2$.

Formulation condensée. Tout ce qui est déductible localement l'est jusqu'à la primorielle, jamais jusqu'à $n/2$. C'est le contenu exact de l'intuition formulée en 2006 - "quelque chose vient modifier la structure pendant le cours de sa construction" - et que j'ai nommée en septembre 2026 *principe d'incertitude fractale* : le gain de connaissance sur la *valeur* (divisible ou non par p) se paie en perte de connaissance de la *position* (le comptage), et réciproquement. Le "triléen" (par opposition à booléen) - la logique à trois valeurs 0, 1, je-ne-sais-pas - en est l'ombre logique : sa fermeture est la seule loi "jamais deux divisibles consécutifs", trop pauvre pour porter un énoncé de densité. On ne prouve rien avec l'ombre, mais l'ombre montre où est le corps.

3. Le mur est celui de toute la famille

Le terme d'erreur (par opposition au terme principal), lorsqu'on utilise la formule ci-dessus, est structurellement lié au *problème de parité* du crible (Selberg) : aucun crible pur (Legendre, Brun, Selberg, grand crible) ne distingue un entier ayant un nombre impair de facteurs premiers d'un entier ayant un nombre pair de facteurs premiers. C'est pourquoi Chen (1973 ; tout nombre pair assez grand est somme d'un premier et d'un entier ayant au plus deux facteurs premiers) marque la limite accessible de ces méthodes, et cette limite n'est donc pas une limite qui serait spécifiquement liée à la conjecture de Goldbach.

Hardy lui-même concluait sa conférence de Copenhague de 1921 en disant qu'il ne pouvait croire les méthodes élémentaires de Merlin et Brun "suffisamment puissantes pour conduire à une solution" (i.e. à une démonstration de la conjecture de Goldbach), et sa propre méthode échoue pour $r = 2$ "par une puissance de n". Rencontrer le même mur que Brun, que Schnirelmann, que Selberg, n'est pas un échec particulier : c'est le signe que la voie a été poussée jusqu'à son bord exact.

4. Ce qui subsiste

Restent vrais et démontrés, indépendamment de la conjecture :

1. la loi miroir (section 1), purement locale et insensible à l'oubli du comptage ;
2. la valeur exacte du crible sur toute période primorielle, et sa convergence avec le produit de Hardy-Littlewood ;
3. la structure palindromique des séquences de valuations p-adiques sur les primorielles ;
4. le diagnostic d'impossibilité : l'erreur du crible de Legendre exact domine exponentiellement le terme principal, ce qui étend à cette voie tout entière l'obstruction connue sous le nom de problème de parité.

Le dossier associé à ce chemin pour affronter la conjecture de Goldbach est clos. La conclusion n'est pas : "j'ai échoué", mais : "voici le bord exact du petit espace que j'ai parcouru".

Références

[1] Denise Vella-Chemla, *Fractales, symétries et conjecture de Goldbach*, février 2006. https://denisevellachemla.eu/fractales.html

[2] Denise Vella-Chemla, *Deux par classe*. https://denisevellachemla.eu/moins-deux.pdf

[3] G. H. Hardy, *Goldbach's problem*, Matematisk Tidsskrift. B, 1922, p. 1-16. Traduction : https://denisevellachemla.eu/trad-Hardy-Goldbach-deepseek-dvc-20260730.pdf, notamment le bas de la page 5 et le haut de la page 6.

[4] L. Mirsky, *Additive Prime Number Theory*, The Mathematical Gazette, vol. 42, n° 339 (1958), p. 7-10. Traduction : https://denisevellachemla.eu/trad-Mirsky.pdf, page 2, le paragraphe commençant par "Une adaptation du crible de Brun . . .".

[5] L'IA Claude, *Pourquoi le produit des* $(1 - 2/p_k)$ *n'est pas à utiliser pour la conjecture de Goldbach*, piloté par Denise Vella-Chemla, septembre 2026. https://denisevellachemla.eu/reexplication-pourquoi-minore-1moins2surp-inoperant-claude-dvc-20260903.pdf

[6] J. Merlin, *Sur quelques théorèmes d'Arithmétique et un énoncé qui les contient*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, tome 153, Paris, 1911, p. 516-518.