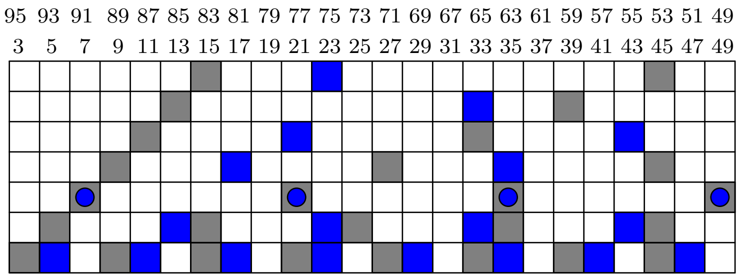
Une fonction qui semble minorer le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair donné

Denise Chemla

28/11/10

On rappelle qu'à la recherche des décomposants de Goldbach d'un nombre pair $2x$, on a choisi de représenter les caractères de divisibilité des nombres impairs de 3 à $2x-3$ dans une grille telle que celle présentée ci-dessous pour le nombre pair 98.



Chaque ligne correspond à un nombre impair $2i+1$ pour i compris entre 1 et $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$. La grille de recherche des décomposants de Goldbach de $2x$ contient $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$ colonnes.

Il y a autant de décompositions de Goldbach de $2x = 98$ qui font intervenir deux sommants supérieurs à $2\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1$ que de colonnes de la grille ne contenant aucune case colorée.

On constate que les lignes correspondant à un nombre impair composé (par exemple, ici la quatrième ligne correspondant au nombre impair 9) ne contiennent jamais de case colorée qui n'ait déjà été colorée par les lignes des diviseurs du nombre composé en question (en l'occurrence pour le nombre composé 9, qui n'ait déjà été colorée dans la première ligne correspondant au nombre impair 3).

L'étude de telles grilles amène à proposer la formule suivante pour minorer le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair donné.

Posons :

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } 2i+1 \textit{ est un nombre premier qui divise } x \\ 2 & \text{si } 2i+1 \textit{ est un nombre premier qui ne divise pas } x \end{cases}$$

Le nombre de décomposants de Goldbach semble pouvoir être minoré par :

$$f(2x) = \Big\lfloor \frac{x-1}{2} \Big\rfloor \prod_{i=1}^{\lfloor\sqrt{x}\rfloor} \Big(1 - \frac{a_i}{2i+1}\Big)$$

Si l'on n'établit pas de distinction entre nombres premiers et composés (ce qui équivaut à considérer que les nombres composés peuvent éliminer eux-aussi des décomposants de Goldbach alors que ce n'est pas le cas), la formule devient :

$$f(2x) = \Big\lfloor \frac{x-1}{2} \Big\rfloor \prod_{i=1}^{\lfloor\sqrt{x}\rfloor} \Big(1 - \frac{2}{2i+1}\Big)$$

Le produit contient les fractions suivantes : $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$, $\ldots$, $\frac{2\lfloor\sqrt{x}\rfloor-1}{2\lfloor\sqrt{x}\rfloor+1}$.

On le simplifie en $\frac{1}{2\lfloor\sqrt{x}\rfloor+1}$.

La formule devient :

$$f(2x) = \Big\lfloor \frac{x-1}{2} \Big\rfloor \frac{1}{2\lfloor\sqrt{x}\rfloor+1}$$

On la simplifie en :

$$f(2x) = \Big\lfloor \frac{\sqrt{x}}{4} \Big\rfloor$$

On appelle $NbGoldbach(2x)$ le nombre de décompositions de $2x$ comme somme de deux nombres premiers.

Par programme, la fonction f testée jusqu'à 3 500 000 fournit un nombre $f(2x)$ toujours inférieur à $NbGoldbach(2x)$ et supérieur ou égal à 1 dès que $2x$ est supérieur ou égal à 32.

$$\forall\, 2x \;\geq\; 32,\; 1 \;\leq\; f(2x) \;\leq\; NbGoldbach(2x).$$

Dans un article de Bernard Teissier de 1966 [1], consacré au crible de Brun, des idées similaires sont présentées (notamment page 11-10 concernant la conjecture de Goldbach). L'auteur fournit des majorations du nombre de décomposants.

[1] Bernard TEISSIER, Crible de Brun, Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, no 2 (1965-1966), exp. no 11, p. 1-13., consultable à l'adresse
$http://www.numdam.org/item?id = SDPP\_1965-1966\_\_7\_2\_A1\_0$