Des hauts et des bas (Denise Vella-Chemla, 12.5.2018)

On cherche à démontrer la conjecture de Goldbach. On définit 4 variables ainsi :

$$X_a(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ et } q \textit{ premiers}\}$$

$$X_b(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ composé et } q \textit{ premier}\}$$

$$X_c(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ premier et } q \textit{ composé}\}$$

$$X_d(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ et } q \textit{ composés}\}$$

Dans la suite de ce document, on note $E(x)$ la partie entière de x (i.e. $\lfloor x \rfloor$).

On va supposer qu'$X_a(2n) = 0$ alors qu'$X_a(n)$ est non nul et essayer d'aboutir à une contradiction.

On essaie un premier cas, on s'aide visuellement de petits dessins ; on numérote les différentes parties pour les "tracer" lors du passage du dessin associé à n à celui associé à $2n$.

Quelques éléments sont à préciser :

- la couleur grise est utilisée pour les nombres composés, la couleur blanche est utilisée pour les nombres premiers ;
- les rectangles du bas représentent les petits sommants tandis que les rectangles du haut représentent les grands sommants des décompositions ;
- les décompositions sont "mélangées" : on échange les colonnes contenant chacune un entier x dans la ligne du bas et son complémentaire $n-x$ dans la ligne du haut de façon à ce que toutes les colonnes de même type (i.e. contenant des décompositions de la forme *premier* + *premier*, *premier* + *composé*, *composé* + *premier* et *composé* + *composé*) soient juxtaposées pour permettre les comptages par les variables $X_a(n), X_b(n), X_c(n), X_d(n)$.
- il faut avoir à l'esprit que lors du passage de n à $2n$, tous les nombres qui interviennent dans les décompositions de n (compris entre 3 et $n-3$), qui se trouvent dans les deux lignes de nombres représentées sur la figure 1, se retrouvent sur la ligne du bas de la figure 2 (ce sont les petits sommants de $2n$ qui sont compris entre 3 et n [*]).

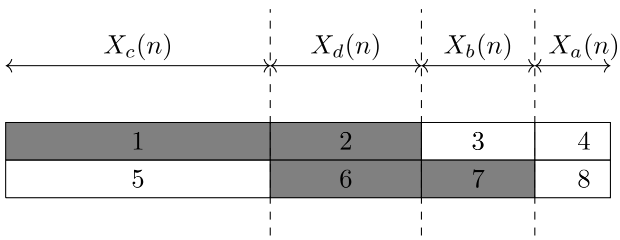

FIGURE 1 : décompositions de n

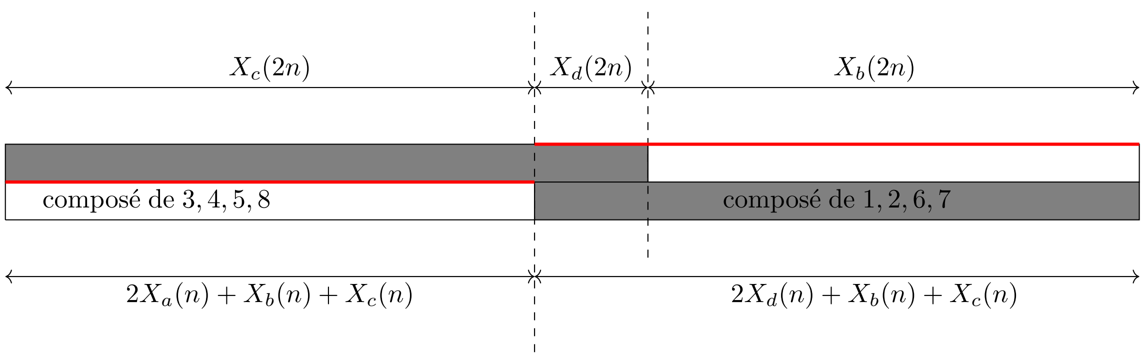

FIGURE 2 : décompositions de $2n$

Sur la figure 2 ci-dessus, on a repassé en rouge les segments dont on utilise la longueur pour égaler la taille totale de la figure qui est connue.

[*]. Il faudrait noter $n-3$ à la place de n mais on ne se préoccupe pas des cas-limites.

On a pour la figure 2, puisqu'on a posé comme hypothèse qu'$X_a(2n) = 0$:

$$X_b(2n) + X_d(2n) + 2X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) = \frac{2n}{4}$$

Explication de la provenance de l'égalité ci-dessus : $X_b(2n) + X_d(2n)$ est la longueur du segment rouge en haut à droite de la figure tandis que $2X_a(n) + X_b(n) + X_c(n)$ est la longueur du segment rouge en bas à gauche.

On a trivialement pour la figure 1 :

$$X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \frac{n}{4}$$

De ces 2 égalités, on déduit par soustraction de la seconde à la première :

$$X_b(2n) + X_d(2n) + X_a(n) - X_d(n) = \frac{n}{4}$$

1) Supposons $X_d(n) > X_a(n)$; alors $X_a(n) - X_d(n)$ est négatif.

Mais on n'arrive pas à aboutir à une contradiction puisqu'on obtient † :

$$X_d(n) + X_d(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_a(n) - X_d(n) = \frac{n}{4}$$

Les $X_d(n)$ s'éliminent, on tourne en rond.

2) Supposons maintenant que $X_d(n) \leqslant X_a(n)$.

La contradiction provient du fait de l'égalité :

$$X_d(n) - X_a(n) = E(n/4) - \pi(n) + \delta(n) \qquad (1)$$

$X_d(n) - X_a(n)$ est strictement positif pour $n \geqslant 122$. $\delta(n)$ est une variable négligeable qui vaut 0, 1 ou 2.

Pour $n = 122$, $X_d(n) = X_a(n)$.

Au-delà, de ce nombre, alors que $E(n/4)$ croît régulièrement tous les 4 entiers, $\pi(n)$ n'augmente quant à elle qu'à chaque nombre premier, et donc la différence $X_d(n) - X_a(n)$ s'accroît toujours davantage.

On a prouvé par récurrence dans http://denise.vella.chemla.free.fr/nombres-et-lettres.pdf ‡ un certain nombre de propriétés dont l'égalité $X_d(n) - X_a(n) = E(n/4) - \pi(n) + \delta(n)$ découle.

†. Pour comprendre comment on obtient cette égalité, regarder les deux expressions associées au segment rouge qui se trouve en haut à droite de la figure 2, l'une en haut et l'autre en bas de la figure.

‡. Cette note traduite en anglais a été postée sur Hal le 22 octobre 2014 https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01109052.