

1. Les places de $\mathbb{Q}$: place archimédienne et places p -adiques

1.1. Point de départ : mesurer la taille d'un rationnel

Sur $\mathbb{Q}$, on a l'habitude d'une seule façon de mesurer la taille d'un nombre : la valeur absolue usuelle $|x|$. Mais ce n'est pas la seule possible. Pour chaque nombre premier p , on peut définir une autre valeur absolue, dite *p -adique* :

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}$$

où $v_p(x)$ est l'exposant de p dans la factorisation de x (positif si p divise beaucoup x , négatif si p est au dénominateur). Concrètement : plus un nombre est divisible par une grande puissance de p , plus il est *petit* au sens p -adique. C'est le monde à l'envers par rapport à l'intuition usuelle : $1/1\,000\,000$ est petit au sens usuel, mais $p^{1\,000\,000}$ est petit au sens p -adique.

Théorème 1 (Ostrowski). *Les valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$, à équivalence près, sont exactement : la valeur absolue usuelle, et une valeur absolue p -adique pour chaque nombre premier p . Chacune de ces classes d'équivalence s'appelle une place de $\mathbb{Q}$.*

1.2. Ce que chaque place produit : un corps complet, pas juste $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Exactement comme on complète $\mathbb{Q}$ avec la valeur absolue usuelle pour obtenir $\mathbb{R}$ (en “bouchant les trous”, en ajoutant les limites de suites de Cauchy), on peut compléter $\mathbb{Q}$ avec $|\cdot|_p$. On obtient un nouveau corps, $\mathbb{Q}_p$, les *nombre p -adiques* - un objet aussi gros et riche que $\mathbb{R}$, avec ses propres nombres “irrationnels p -adiques”, sa propre topologie, etc.

Donc :

- la *place archimédienne* (notée ∞) donne $\mathbb{R}$;
- la *place p* (une par nombre premier) donne $\mathbb{Q}_p$.

Où se situe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans tout ça ?

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ n'est *pas* la place elle-même : c'est l'écho le plus pauvre qu'on puisse tirer de la place p , obtenu au bout d'une chaîne de réductions successives :

$$\underbrace{\mathbb{Q}_p}_{\substack{\text{le corps complet,} \\ \text{la vraie "place"}}} \supset \underbrace{\mathbb{Z}_p}_{\substack{\text{entiers } p\text{-adiques} \\ (\text{valuation} \geq 0)}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\text{résidu, un seul niveau d'information}}$$

Une construction géométrique naïve qui associe à chaque entier n un unique point sur un plan méridien via $n \bmod p$ ne dessine que cette toute dernière étape : le résidu. Pour se rapprocher véritablement de $\mathbb{Z}_p$ (et donc de la place p), il faut empiler les résidus modulo $p, p^2, p^3, \dots$ - chaque niveau supplémentaire rapproche de $\mathbb{Z}_p$ tout entier, sans jamais l'atteindre avec un nombre fini de niveaux.

1.3. Pourquoi “archimédienne” ?

Le nom vient d’un axiome dû à Archimède : pour tous réels $0 < a < b$, il existe un entier n tel que $na > b$ - autrement dit, en additionnant a suffisamment de fois, on dépasse toujours n’importe quel b . La valeur absolue usuelle satisfait cet axiome.

La valeur absolue p -adique, elle, ne le satisfait pas : la suite $p, p^2, p^3, \dots$ décroît indéfiniment au sens p -adique sans jamais “dépasser” quoi que ce soit au sens usuel. D’où le nom : place *non archimédienne* pour chaque p , et place *archimédienne* pour la seule place ∞ , celle de $\mathbb{R}$.

1.4. Pourquoi c’est important pour le programme de Connes

L’anneau des adèles $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ est le produit restreint de toutes ces complétions à la fois :

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \prod_p' \mathbb{Q}_p$$

traitées sur un pied d’égalité formel, alors qu’elles ont des natures topologiques complètement différentes : $\mathbb{R}$ est connexe, tandis que chaque $\mathbb{Q}_p$ est totalement discontinu. C’est cette égalité de traitement entre une place archimédienne et une infinité de places non archimédiennes qui est au cœur du dictionnaire adélique du programme de géométrie non commutative de Connes.

2. Piste “van der Pol” pour les zéros de ζ : généralisation hors de la droite critique avec l’ia claud

J’ai fourni à l’ia claud la note “Piste de van der Pol pour les zéros de ζ ”, juillet 2026

<https://denisevellachemla.eu/van-der-Pol-Riemann-sommation-exacte-claud-dvc-20260712.pdf> .

Cette note établit, *sur la droite critique uniquement* ($s = \frac{1}{2} + it$), l’identité

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \left(\frac{1}{2} + it\right) \left(a(t) + ib(t)\right),$$

en s’appuyant sur la simplification

$$\frac{s}{s-1} + \frac{s}{\bar{s}} = 0 \quad \text{valable uniquement quand } \operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2} \text{ (car alors } \bar{s} = 1 - s).$$

La question posée était : cette simplification n’est-elle vraiment possible que sur la droite critique, ou bien est-elle plus générale ?

La réponse, obtenue ci-dessous, est que la simplification est en réalité *générale* : la formulation initiale utilisait $\frac{1}{\bar{s}}$ là où il fallait écrire $\frac{1}{1-s}$, ces deux quantités ne coïncidant que sur la droite critique.

2.1. L'identité générale

Reprenons la formule de Titchmarsh, valable pour $\operatorname{Re}(s) > 0$, $s \neq 1$:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s I(s), \quad I(s) = \int_0^\infty \{e^u\} e^{-su} du.$$

Pour $u < 0$, $\{e^u\} = e^u$ (car $0 < e^u < 1$), donc la contribution correspondante à l'intégrale complète sur $\mathbb{R}$ est

$$I_-(s) := \int_{-\infty}^0 e^{(1-s)u} du = \frac{1}{1-s}, \quad \operatorname{Re}(s) < 1.$$

En posant $J(s) = I_-(s) + I(s)$ (intégrale complète sur $\mathbb{R}$), on a $I(s) = J(s) - \frac{1}{1-s}$, d'où

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \left(J(s) - \frac{1}{1-s} \right) = \underbrace{\frac{s}{s-1} + \frac{s}{1-s}}_{=0 \text{ identiquement}} - s J(s).$$

Théorème 2 (Identité générale). *Pour tout $s = \sigma + it$ avec $0 < \sigma < 1$,*

$$\zeta(s) = -s J(s), \quad J(s) = \int_{-\infty}^\infty h_\sigma(x) e^{-ixt} dx,$$

où le noyau réel h_σ est donné par

$$h_\sigma(x) = \begin{cases} \{e^x\} e^{-\sigma x} & x \geq 0 \\ e^{(1-\sigma)x} & x < 0. \end{cases}$$

Remarque : cette annulation est donc valable dans *toute* la bande critique, et non uniquement sur la droite $\sigma = 1/2$. Ce qui était spécifique à $\sigma = 1/2$ dans la formulation antérieure n'était qu'une notation ($1/\bar{s}$ au lieu de $1/(1-s)$), ces deux expressions coïncidant seulement quand $\sigma = 1/2$.

2.2. Sommation exacte généralisée et borne d'erreur

En généralisant la sommation exacte palier par palier (section 2 du document de juillet 2026) au cas σ quelconque, avec $A = 1-s$, $B = -s$:

$$J_K(s) = \sum_{k=1}^K \left[\frac{(k+1)^A - k^A}{A} - k \frac{(k+1)^B - k^B}{B} \right] + \frac{1}{1-s},$$

$$\text{et } \zeta_{\text{approx}}(s, K) := -s J_K(s) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \zeta(s).$$

Proposition 3 (Borne d'erreur généralisée).

$$\left| \zeta_{\text{approx}}(s, K) - \zeta(s) \right| \leq \frac{|s|}{\sigma} K^{-\sigma}.$$

Démonstration. La seule troncature provient de la queue $\int_{\ln K}^\infty \{e^x\} e^{-\sigma x} dx$, majorée en module par $\int_{\ln K}^\infty e^{-\sigma x} dx = K^{-\sigma}/\sigma$ (car $|\{e^x\}| \leq 1$). L'erreur sur $\zeta_{\text{approx}} = -s J_K$ est donc majorée par $|s| \cdot \frac{K^{-\sigma}}{\sigma}$. □

Remarque : la borne $O\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)$ obtenue dans la note de juillet 2026 était une coïncidence propre à $\sigma = \frac{1}{2}$ (où $K^{-\sigma} = \frac{1}{\sqrt{K}}$). En toute généralité, la convergence est plus lente près du bord $\sigma \rightarrow 0$ de la bande critique, et plus rapide près de $\sigma \rightarrow 1$.

2.3. Vérification numérique

Calcul exact (sommation palier par palier) comparé à `mpmath.zeta` (précision arbitraire), pour plusieurs valeurs de σ hors de la droite critique.

σ	t	K	écart $ \zeta_{\text{approx}} - \zeta $
0,30	5,0	10^3	$6,29 \times 10^{-2}$
0,30	5,0	10^4	$3,15 \times 10^{-2}$
0,30	5,0	10^5	$1,58 \times 10^{-2}$
0,70	5,0	10^3	$3,97 \times 10^{-3}$
0,70	5,0	10^4	$7,92 \times 10^{-4}$
0,70	5,0	10^5	$1,58 \times 10^{-4}$
0,90	3,0	10^3	$9,97 \times 10^{-4}$
0,90	3,0	10^4	$1,26 \times 10^{-4}$
0,90	3,0	10^5	$1,58 \times 10^{-5}$
0,50	14,1347 (zéro connu)	10^3	$1,58 \times 10^{-2}$
0,50	14,1347 (zéro connu)	10^4	$5,00 \times 10^{-3}$
0,50	14,1347 (zéro connu)	10^5	$1,58 \times 10^{-3}$

Les écarts observés décroissent conformément à la borne $|s| \frac{K^{-\sigma}}{\sigma}$: plus σ est proche de 1, plus la convergence est rapide, à K fixé - confirmant numériquement la Proposition 1.

2.4. Lien via l'équation fonctionnelle

L'équation fonctionnelle de Riemann s'écrit, avec $\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

En substituant $\zeta(s) = -sJ(s)$, on obtient une relation exacte, nouvelle, entre $J(s)$ et son image miroir $J(1-s)$ (même t , $\sigma \leftrightarrow 1-\sigma$) :

$$s \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) J(s) = (1-s) \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) J(1-s).$$

2.5. Portée : ce que cela apporte, ce que cela n'apporte pas

Ce qu'apporte et ce que n'apporte pas l'approche de van der Pol.

Apporté :

- une identité exacte et générale $\zeta(s) = -sJ(s)$, valable dans toute la bande critique $0 < \sigma < 1$, corrigeant et généralisant l'identité de juillet 2026 qui n'était établie que sur $\sigma = \frac{1}{2}$.
- une borne d'erreur généralisée $K^{-\sigma}$, plus informative que le $\frac{1}{\sqrt{K}}$ d'origine, vérifiée numériquement.
- une relation exacte, via l'équation fonctionnelle, entre $J(s)$ et $J(1-s)$ - point de départ concret pour qui chercherait une inégalité de convexité en σ .

Non apporté : une voie vers une démonstration de l'hypothèse de Riemann. La relation fonctionnelle ci-dessus reformule l'hypothèse de Riemann sans en réduire la difficulté : montrer une inégalité de stricte convexité (ou toute propriété forçant l'égalité des modules $|J(s)|$ et $|J(1-s)|$ uniquement lorsque $\sigma = \frac{1}{2}$) est, à la connaissance de l'auteur, un problème de difficulté comparable à l'hypothèse de Riemann elle-même, dans le même esprit que les formulations classiques via $\xi(s)$ ou le produit de Hadamard. C'est une généralisation propre et vérifiée de la piste van der Pol, pas un pas vers une preuve.

3. Tout un programme de travail

3.1. Schéma général

L'approche de Connes et al. vise à construire, à partir d'une forme quadratique de Weil tronquée, des opérateurs auto-adjoints dont le spectre converge vers les zéros non triviaux de $\zeta\left(\frac{1}{2} + is\right)$:

$$QW_\lambda \longrightarrow \xi_\lambda \longrightarrow \widehat{\xi}_\lambda \longrightarrow \Xi.$$

Pour N fini, les opérateurs $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ sont construits comme des perturbations de rang un. Sous les hypothèses spectrales appropriées, ils sont auto-adjoints et

$$\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda, N)} - z) = -i\lambda^{-iz}\widehat{\xi}_\lambda(z).$$

L'auto-adjonction donne alors la réalité des zéros de $\widehat{\xi}_\lambda$.

3.2. Résultats établis

1. Existence de la plus petite valeur propre de QW_λ .
2. Construction des opérateurs $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ sous les hypothèses portant sur le vecteur propre minimal.
3. Auto-adjonction de ces opérateurs sous ces hypothèses.

4. Construction du modèle prolate h_λ et de

$$k_\lambda = \mathcal{E}(h_\lambda).$$

5. Estimation

$$\|h_\lambda - h\|_\infty = O(\lambda^{-2}).$$

6. Convergence correspondante de $\widehat{k}_\lambda$ vers Ξ sur les domaines considérés.

7. Les calculs numériques donnent une très grande précision spectrale, mais ne constituent pas une preuve de la convergence vers les zéros de ζ .

3.3. Les lacunes fondamentales

3.4. Simplicité du minimum

Il faut démontrer

$$\lambda_1(QW_\lambda) < \lambda_2(QW_\lambda).$$

Cette propriété permet de sélectionner canoniquement un vecteur propre ξ_λ .

3.5. Parité

Pour l'involution

$$(Jf)(u) = f(u^{-1}),$$

il faut démontrer

$$J\xi_\lambda = \xi_\lambda.$$

Une formulation spectrale à rechercher est

$$\lambda_{\min}(QW_\lambda|_{L_+^2}) < \lambda_{\min}(QW_\lambda|_{L_-^2}).$$

3.6. Obstacle principal : le lien entre les fonctions d'onde prolate et le travail de Connes et al.

L'estimation

$$\|h_\lambda - h\|_\infty = O(\lambda^{-2})$$

ne compare pas le vecteur propre véritable ξ_λ de QW_λ au modèle k_λ .

Il faut démontrer une estimation quantitative du type

$$\|\xi_\lambda - c_\lambda k_\lambda\| \leq \varepsilon(\lambda), \quad \varepsilon(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

C'est le principal obstacle de l'approche de Connes et al.

3.7. Programme spectral naturel

Chercher une décomposition

$$QW_\lambda = A_\lambda + R_\lambda,$$

où A_λ est un opérateur modèle dont le vecteur propre minimal ϕ_λ est relié à k_λ .

Il faudrait obtenir :

1. une borne

$$\|R_\lambda\| \leq r(\lambda);$$

2. une borne inférieure sur le gap

$$g_\lambda = \lambda_2(QW_\lambda) - \lambda_1(QW_\lambda) > 0;$$

3. une estimation de perturbation telle que

$$\sin \angle(\xi_\lambda, \phi_\lambda) \lesssim \frac{\|R_\lambda\|}{g_\lambda};$$

4. une identification quantitative de ϕ_λ avec k_λ .

Ainsi :

$$QW_\lambda \implies \xi_\lambda \implies k_\lambda.$$

3.8. Passage aux transformées et aux zéros

Une fois

$$\|\xi_\lambda - c_\lambda k_\lambda\| \leq \varepsilon(\lambda)$$

établi avec un contrôle suffisant, il faut démontrer

$$\widehat{\xi_\lambda} - c_\lambda \widehat{k_\lambda} \longrightarrow 0$$

uniformément sur les compacts pertinents.

Comme

$$\widehat{k_\lambda} \longrightarrow \Xi,$$

on obtiendrait

$$\widehat{\xi_\lambda} \longrightarrow \Xi.$$

La convergence des fonctions entières, combinée à la réalité des zéros de $\widehat{\xi_\lambda}$ et à un argument de type Hurwitz, fournirait alors le passage spectral vers l'hypothèse de Riemann.

3.9. Limites à verrouiller

1. Contrôler

$$QW_\lambda^N \longrightarrow QW_\lambda.$$

2. Contrôler

$$\xi_{\lambda,N} \longrightarrow \xi_\lambda.$$

3. Contrôler les déterminants régularisés lorsque $N \rightarrow \infty$.

4. Contrôler la compatibilité des deux limites

$$N \rightarrow \infty, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

5. Obtenir une convergence assez forte pour contrôler les zéros et éviter qu'une partie du spectre ne s'échappe dans la limite.

6. Identifier tous les zéros limites avec ceux de Ξ .

3.10. Lemme spectral central à viser

Objectif : Établir

$$\xi_\lambda = c_\lambda k_\lambda + r_\lambda, \quad \|r_\lambda\| \leq \varepsilon(\lambda), \quad \varepsilon(\lambda) \rightarrow 0,$$

avec une estimation suffisamment forte pour permettre le passage aux transformées et aux zéros.

Une voie naturelle est donc

$$QW_\lambda = A_\lambda + R_\lambda \implies \text{contrôle de } R_\lambda + \text{contrôle du gap} \implies \xi_\lambda \simeq k_\lambda.$$

3.11. État synthétique

Étape	Statut
Existence du minimum de QW_λ	établie
Simplicité du minimum	à démontrer
Parité du vecteur propre minimal	à démontrer
Auto-adjonction de $D_{\log}^{(\lambda,N)}$	établie sous hypothèses
Réalité des zéros de $\widehat{\xi}_\lambda$	établie sous hypothèses
$h_\lambda \rightarrow h$	établi
$\widehat{k}_\lambda \rightarrow \Xi$	établi
$\xi_\lambda \simeq k_\lambda$	<i>principal obstacle</i>
$\widehat{\xi}_\lambda \rightarrow \Xi$	à établir
Convergence des zéros	à établir
hyp. de Riemann	<i>non démontrée</i>

4. Rappel de la méthode d'Alain Connes (2026)

Cette méthode ¹ pour l'approximation finie des zéros de zêta est exposée dans l'article de Connes *The Riemann Hypothesis : Past, Present and a Letter Across Time*. Elle sera présentée ci-dessous et la présentation sera suivie d'un inventaire des éléments manquants pour une démonstration de l'hypothèse de Riemann.

Cette explication a été intégralement rédigée par l'ia claudes.

4.1. Contexte général : le programme de géométrie non-commutative

Depuis l'article fondateur de 1999 (*Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math.), Alain Connes propose une réduction de l'hypothèse de Riemann (RH) à la validité d'une **formule de trace** sur l'espace des classes d'adèles $X = \mathbb{A}_k/k^*$ d'un corps global k .

Le dictionnaire géométrique associé (déjà présent dans les traductions antérieures *Le flot de Riemann et les zéros de zeta*, SUNY Stony Brook 1998, et *Géométrie non-commutative et fonction zêta de Riemann*, 2000) est le suivant :

Théorie des fonctions	Géométrie
Zéros et pôles de ζ	Valeurs propres de l'action de C_k sur la cohomologie adélique
Équation fonctionnelle	Opération $*$
Formule explicite	Formule de Lefschetz
RH	Formule de trace

Le point de blocage historique (depuis 1999) est que la formule de trace globale n'est démontrée que dans le cas *semi-local* (ensemble fini S de places fixé) ; le cas global, où S grandit indéfiniment, reste ouvert, et c'est précisément ce cas global qui équivaut à RH.

En février 2026, Connes propose dans *The Riemann Hypothesis : Past, Present and a Letter Across Time* une approche différente et beaucoup plus concrète, fondée sur une troncature **finie** aux petits nombres premiers, combinée aux fonctions d'onde sphéroïdales prolates. C'est cette méthode que nous détaillons ci-dessous.

1. <https://arxiv.org/pdf/2602.04022>, 5 février 2026.

4.2. La méthode : approximation finie par les nombres premiers

4.3. Le critère de positivité de Weil, tronqué

RH équivaut (critère de Weil) à la positivité, pour toute fonction test g lisse à support compact sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\widehat{g}(\pm i/2) = 0$, de

$$\sum_v W_v(g * g^*) \leq 0.$$

Fait clé : si g est à support dans $[\lambda^{-1}, \lambda]$, seuls les nombres premiers $p \leq \lambda$ contribuent, car W_p s'annule sur les fonctions à support dans (p^{-1}, p) .

En fixant $\lambda = 13$, seuls les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13 interviennent dans le calcul. On note Q_{W_λ} la restriction de la forme quadratique de Weil aux fonctions-test à support dans $[\lambda^{-1}, \lambda]$.

4.4. Minimisation à la Dirichlet

Suivant la méthode du principe de Dirichlet (Riemann, puis justifiée à la Hilbert, 1900), on cherche le vecteur η_λ minimisant $Q_{W_\lambda}(\phi)$ sous la contrainte $\int \phi(u)^2 du/u = 1$.

On montre qu'il existe un opérateur auto-adjoint non borné canonique A_λ sur $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], du/u)$ tel que

$$Q_{W_\lambda}(f, f) = \langle A_\lambda f \mid f \rangle,$$

et que le minimiseur η_λ est le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre $\epsilon(\lambda)$ de A_λ .

4.5. Le théorème central : réalité des zéros

Théorème 4 (Connes - van Suijlekom). *Soit $L > 0$, D une distribution réelle sur $[0, L]$, $\widetilde{D}$ sa symétrisation paire sur $[-L, L]$. Si le noyau $\widetilde{D}(x - y)$ définit un opérateur auto-adjoint minoré sur $L^2([-L/2, L/2])$ dont le minimum du spectre est une valeur propre simple et isolée, de fonction propre paire η , alors tous les zéros de la transformée de Fourier entière $\widehat{\eta}(z)$ sont réels.*

C'est un résultat général de théorie spectrale (généralisant un théorème de Carathéodory-Fejér de 1911 sur les matrices de Toeplitz), démontré via des matrices finies tronquées et le théorème de Hurwitz pour le passage à la limite.

Conséquence : si la plus petite valeur propre de Q_{W_λ} est simple et son vecteur propre pair, alors tous les zéros de la transformée de Mellin de η_λ sont automatiquement sur la droite critique - sans vérification a posteriori.

4.6. Résultat numérique

Pour $\lambda = 13$, le calcul numérique de η_{13} et de sa transformée de Mellin donne, sur les 50 premiers zéros approchés, une concordance remarquable avec les vrais zéros de ζ : jusqu'à 54 décimales exactes pour le premier zéro, décroissant progressivement jusqu'à environ 2-3 décimales pour le cinquantième.

4.7. La stratégie de convergence (partie ouverte)

Fait : Riemann avait écrit $\Xi(t)$ comme transformée de Fourier d’une fonction $k(u) = E(h)(u)$, où E est l’opérateur de sommation $E(f)(u) = u^{1/2} \sum_{n \geq 1} f(nu)$, et h est l’unique combinaison des fonctions de Hermite h_0, h_4 d’intégrale nulle.

On veut montrer que η_λ (recentré) converge vers $k = E(h)$ quand $\lambda \rightarrow \infty$. Outil : les fonctions d’onde sphéroïdales prolates (Slepian-Pollak-Landau), déformations $h_{n,\lambda}$ des fonctions de Hermite adaptées au support fini $[-\lambda, \lambda]$, valeurs propres de l’opérateur prolata PW_λ .

On approxime η_λ par $k_\lambda := E(h_\lambda)$, où h_λ est la combinaison de $h_{0,\lambda}, h_{4,\lambda}$ d’intégrale nulle. On montre $\hat{k}_\lambda \rightarrow \Xi$ uniformément sur les bandes fermées, avec erreur explicite en $O(\lambda^{-1/2-\alpha})$.

4.8. Inventaire des éléments manquants pour une démonstration complète

1. *Simplicité et parité de la valeur propre minimale de Q_{W_λ} , pour tout λ .* Le théorème central exige que la plus petite valeur propre de A_λ soit simple et son vecteur propre pair. Ceci est *connu* pour l’opérateur prolata PW_λ seul (fait classique depuis Slepian-Pollak), mais *seulement vérifié numériquement*, pour $\lambda = 13$ et quelques autres petites valeurs, pour la vraie forme de Weil tronquée Q_{W_λ} . Aucune démonstration valable pour tout λ , a fortiori uniformément quand $\lambda \rightarrow \infty$.
2. *Contrôle quantitatif de l’approximation $k_\lambda \approx \theta_x$ (le vrai minimiseur).* La construction de k_λ à partir des fonctions prolates est justifiée par un argument heuristique (le “quasi-radical” de la forme de Weil), sans majoration rigoureuse de $\|\theta_x - k_\lambda\|$. La comparaison numérique entre $\epsilon(\lambda)$ et $1 - \chi_2(\lambda)$ est une similitude *observée*, non prouvée.
3. *Convergence uniforme de $\hat{\eta}_\lambda$ (et non seulement $\hat{k}_\lambda$) vers Ξ .* Le passage à la limite par le théorème de Hurwitz nécessite la convergence localement uniforme de la *vraie* suite $\hat{\eta}_\lambda$, ce qui suppose les points 1 et 2 résolus et combinés.
4. *Identification rigoureuse de la fonction-limite avec Ξ de Riemann.* Même une fois 1-3 acquis, il faut s’assurer que la limite obtenue est exactement Ξ et non une autre fonction entière de même croissance.
5. *Le programme de 1999 reste, en parallèle, toujours ouvert.* Le théorème 5 de l’article de 1999 énonce l’équivalence entre RH et la formule de trace globale $\text{Trace}(Q_\Lambda U(h))$ quand $\Lambda \rightarrow \infty$; seul le cas semi-local (ensemble S fixé) est démontré. La méthode 2026 est une piste parallèle, plus concrète, mais ne remplace pas formellement cette question.

4.9. Sur l’affirmation d’Alain Connes (“à portée de main d’un humain”)

Les points 1 à 4 sont de nature différente du problème de 1999 : ce sont des estimations d’analyse fonctionnelle assez concrètes (positivité, simplicité de spectre, convergence de fonctions propres), sans qu’une idée conceptuelle nouvelle et profonde ne semble requise - c’est en ce sens que la remarque de Connes est défendable.

Cependant, “technique” ne signifie pas “facile” ni “rapide” : l’histoire de RH montre que des étapes jugées proches par des mathématiciens de tout premier plan ont parfois résisté des décennies (cf. le programme de Hilbert-Pólya, plus que centenaire). Les points 1 et 2 en particulier - simplicité spectrale *uniforme* en λ - pourraient cacher une difficulté insoupçonnée (croisement de valeurs propres à un λ improbable, dégénérescence liée à l’arithmétique fine des nombres premiers).

Références

- [1] A. Connes, C. Consani, H. Moscovici, *Zeta Spectral Triples*,
<https://arxiv.org/abs/2511.22755> .
- [2] A. Connes, *The Riemann Hypothesis : Past, Present and a Letter Through Time*,
<https://arxiv.org/abs/2602.04022> .