Revenir à l'algorithme de calcul du nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné en utilisant les valuations p-adiques (Denise Vella-Chemla, août 2023)

On revient à l'algorithme de calcul du nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre x donné qui utilise les valuations k-adiques de ce nombre avec comme bases les nombres k qui sont inférieurs à la moitié de x [1].

On utilise la formule :

$$\pi(x) = \sum_{2\leq y\leq x} \frac{1}{\left|1-(f(y))^{15}\right|} = \frac{1}{\left|1-\left(\displaystyle\sum_{2\leq k\leq \lfloor y/2\rfloor} v_k(y)\right)^{15}\right|}$$

Le programme en python est très simple :

```
def v(k, y):
    if ((y%k) != 0):
       return 0
    else:
       return v(k, y/k)+1

xmax = 1000
pix = 0.0
for x in range(2,xmax+1):
    print('',x, ' :  ', end='')
    somme = 0
    for k in range(2, x//2+1):
       somme = somme+v(k,x)
    pix = pix + 1.0/abs(1.0-pow(float(somme),15))
    print(' sum val k-adiques jusqu a moitie du nb ', somme)
    print(' pix ', pix)
```

Dans le tableau ci-dessous sont fournies les valeurs des sommes des valuations k-adiques de x pour k allant de 2 à $\lfloor x/2\rfloor$[2], pour les nombres de 2 à 100.

[1]On avait proposé cet algorithme en septembre 2018. Voir http://denise.vella.chemla.free.fr/fracto.pdf.
[2]Le signe "//" est celui de la division entière en python.

	f(21) = 2	f(41) = 0	f(61) = 0	f(81) = 7
f(2) = 0	f(22) = 2	f(42) = 6	f(62) = 2	f(82) = 2
f(3) = 0	f(23) = 0	f(43) = 0	f(63) = 5	f(83) = 0
f(4) = 2	f(24) = 8	f(44) = 5	f(64) = 13	f(84) = 11
f(5) = 0	f(25) = 2	f(45) = 5	f(65) = 2	f(85) = 2
f(6) = 2	f(26) = 2	f(46) = 2	f(66) = 6	f(86) = 2
f(7) = 0	f(27) = 4	f(47) = 0	f(67) = 0	f(87) = 2
f(8) = 4	f(28) = 5	f(48) = 12	f(68) = 5	f(88) = 8
f(9) = 2	f(29) = 0	f(49) = 2	f(69) = 2	f(89) = 0
f(10) = 2	f(30) = 6	f(50) = 5	f(70) = 6	f(90) = 11
f(11) = 0	f(31) = 0	f(51) = 2	f(71) = 0	f(91) = 2
f(12) = 5	f(32) = 9	f(52) = 5	f(72) = 14	f(92) = 5
f(13) = 0	f(33) = 2	f(53) = 0	f(73) = 0	f(93) = 2
f(14) = 2	f(34) = 2	f(54) = 8	f(74) = 2	f(94) = 2
f(15) = 2	f(35) = 2	f(55) = 2	f(75) = 5	f(95) = 2
f(16) = 7	f(36) = 10	f(56) = 8	f(76) = 5	f(96) = 15
f(17) = 0	f(37) = 0	f(57) = 2	f(77) = 2	f(97) = 0
f(18) = 5	f(38) = 2	f(58) = 2	f(78) = 6	f(98) = 5
f(19) = 0	f(39) = 2	f(59) = 0	f(79) = 0	f(99) = 5
f(20) = 5	f(40) = 8	f(60) = 11	f(80) = 12	f(100) = 10

On constate par programme que $\pi(x)$ compte bien les nombres premiers.[3]

Le nombre de nombres premiers $\pi(x)$ "saute" de 1 à chaque nombre premier tandis qu'à chaque nombre composé, il est incrémenté de :

$$\Delta(x) = \frac{1.0}{\left| 1.0 - \left(\sum_{2 \leq k \leq \lfloor x/2 \rfloor} v_k(x) \right)^{15} \right|}$$

Il faudrait démontrer que l'ajout à $\pi(x)$, entre deux nombres premiers successifs, des nombres décimaux $\Delta(x)$ associés aux nombres composés, ne fait pas augmenter $\pi(x)$ de plus de 1, ce qui perturberait complètement le comptage.

On visualise dans le tableau ci-dessous la variation de $\pi(x)$ selon la formule qu'on a proposée.

[3]Se reporter par exemple à cette page de wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Prime-counting_function.

		26	9.000305186124626	51	15.000549335267118	76	21.0007629650016
2	1.0	27	9.000305187055949	52	15.000549335299887	77	21.000793483511075
3	2.0	28	9.000305187088717	53	16.000549335299887	78	21.000793483513203
4	2.000030518509476	29	10.000305187088717	54	16.000549335299915	79	22.000793483513203
5	3.000030518509476	30	10.000305187090843	55	16.00057985380939	80	22.000793483513203
6	3.000061037018952	31	11.000305187090843	56	16.00057985380942	81	22.000793483513412
7	4.000061037018952	32	11.000305187090849	57	16.000610372318896	82	22.00082400202289
8	4.000061037950275	33	11.000335705600325	58	16.00064089082837	83	23.00082400202289
9	4.000091556459751	34	11.0003662241098	59	17.00064089082837	84	23.00082400202289
10	4.000122074969227	35	11.000396742619277	60	17.00064089082837	85	23.000854520532364
11	5.000122074969227	36	11.000396742619278	61	18.00064089082837	86	23.00088503904184
12	5.000122075001994	37	12.000396742619278	62	18.000671409337848	87	23.000915557551316
13	6.000122075001994	38	12.000427261128754	63	18.000671409370614	88	23.000915557551345
14	6.00015259351147	39	12.00045777963823	64	18.000671409370614	89	24.000915557551345
15	6.000183112020946	40	12.000457779638259	65	18.00070192788009	90	24.000915557551345
16	6.000183112021157	41	13.000457779638259	66	18.00070192788222	91	24.00094607606082
17	7.000183112021157	42	13.000457779640385	67	19.00070192788222	92	24.000946076093587
18	7.000183112053924	43	14.000457779640385	68	19.000701927914985	93	24.000976594603063
19	8.000183112053925	44	14.000457779673154	69	19.00073244642446	94	24.00100711311254
20	8.000183112086694	45	14.000457779705922	70	19.00073244642659	95	24.001037631622015
21	8.00021363059617	46	14.000488298215398	71	20.00073244642659	96	24.001037631622015
22	8.000244149105646	47	15.000488298215398	72	20.00073244642659	97	25.001037631622015
23	9.000244149105646	48	15.000488298215398	73	21.00073244642659	98	25.001037631654782
24	9.000244149105674	49	15.000518816724874	74	21.000762964936065	99	25.00103763168755
25	9.00027466761515	50	15.000518816757642	75	21.000762964968832	100	25.00103763168755

Ce qui est extraordinaire ici, c'est le fait que la quantité qui est ajoutée à $\pi(x)$ au fur et à mesure est la même pour des nombres très différents, mais de factorisations "semblables" : fournissons dans le tableau ci-dessous la différence (le delta $\Delta(x)$ vu plus haut) ajouté à $\pi(x)$ pour les entiers successifs, en regard de leur factorisation. On voit par exemple (on les a notés en bleu) qu'on ajoute la même quantité pour le nombre $95 = 5^1.19^1$ que pour un nombre (petit) comme $10 = 2^1.5^1$ ou pour un carré comme $25 = 5^2$. Pour tous ces nombres, notons-les n, la somme des valuations p-adiques $\displaystyle\sum_{2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor} v(k,n)$ est égale à 2.

Pour rappel, on a une vision syntaxique ("langagière") de la valuation k-adique[4] :

- pour trouver les valuations 2-adiques, "écris" 0-1-, puis recopie ce que tu viens d'écrire en changeant seulement le dernier nombre que tu as écrit en lui-même augmenté de 1 ; tu obtiens la séquence 0-1-0-2.
- recommence : recopie le tout, et augmente le dernier nombre écrit de 1 ; tu obtiens 0-1-0-2-0-1-0-3 : tu as, sans même diviser, obtenu les exposants de 2 dans les factorisations des nombres de 1 à 8 ;

[4]Elle serait par sa simplicité enseignable en école élémentaire. Pour un autre exemple d'un procédé syntaxique pur appliqué au dessin du fractal appelé "Minkowski sausage" par Mandelbrot, voir le programme http://denise.vella.chemla.free.fr/pgm-cx-grecque.png et son résultat http://denise.vella.chemla.free.fr/res-pgm-cx-grecque.png.

- recommence : 0-1-0-2-0-1-0-3-0-1-0-2-0-1-0-4, tu as les exposants de 2 dans les factorisations des nombres de 1 à 16.

- pour trouver les valuations 3-adiques, procède similairement mais en recopiant 3 fois la séquence de niveau n pour obtenir celle de niveau $n+1$. Pour obtenir les exposants de 3 dans les factorisations des nombres de 1 à 27, tu as obtenu successivement les chaînes 0-0-1, puis 0-0-1-0-0-1-0-0-2, puis 0-0-1-0-0-1-0-0-2-0-0-1-0-0-1-0-0-2-0-0-1-0-0-1-0-0-3.

- pour trouver les valuations k-adiques, procède similairement mais en recopiant k fois la séquence de niveau n pour obtenir celle de niveau $n+1$.

			26	$2^1.13^1$	3.051e-5	51	$3^1.17^1$	3.051e-5	76	$2^2.19^1$	3.276e-11
2	p	1	27	3^3	9.313e-10	52	$2^2.13^1$	3.276e-11	77	$7^1.11^1$	3.051e-5
3	p	1	28	$2^2.7^1$	3.276e-11	53	p	1	78	$2^1.3^1.13^1$	2.126e-12
4	2^2	3.051e-5	29	p	1	54	$2^1.3^3$	2.842e-14	79	p	1
5	p	1	30	$2^1.3^1.5^1$	2.126e-12	55	$5^1.11^1$	3.051e-5	80	$2^4.5^1$	6.490e-17
6	$2^1.3^1$	3.051e-5	31	p	1	56	$2^3.7^1$	2.842e-14	81	3^4	2.106e-13
7	p	1	32	2^5	4.856e-15	57	$3^1.19^1$	3.051e-5	82	$2^1.41^1$	3.051e-5
8	2^3	9.313e-10	33	$3^1.11^1$	3.051e-5	58	$2^1.29^1$	3.051e-5	83	p	1
9	3^2	3.051e-5	34	$2^1.17^1$		59	p	1	84	$2^2.3^1.7^1$	2.393e-16
10	$2^1.5^1$	3.051e-5	35	$5^1.7^1$	3.051e-5	60	$2^2.3^1.5^1$	2.393e-16	85	$5^1.17^1$	3.051e-5
11	p	1	36	$2^2.3^2$	1.000e-15	61	p	1	86	$2^1.43^1$	3.051e-5
12	$2^2.3^1$	3.276e-11	37	p	1	62	$2^1.31^1$		87	$3^1.29^1$	3.051e-5
13	p	1	38	$2^1.19^1$	3.051e-5	63	$3^2.7^1$	3.276e-11	88	$2^3.11^1$	2.842e-14
14	$2^1.7^1$	3.051e-5	39	$3^1.13^1$	3.051e-5	64	2^5	1.953e-17	89	p	1
15	$3^1.5^1$	3.051e-5	40	$2^1.5^1$	2.842e-14	65	$5^1.13^1$	3.051e-5	90	$2^1.3^2.5^1$	2.393e-16
16	2^4	2.106e-13	41	p	1	66	$2^1.3^1.11^1$	2.126e-12	91	$7^1.13^1$	3.051e-5
17	p	1	42	$2^1.3^1.7^1$	2.126e-12	67	p	1	92	$2^2.23^1$	3.276e-11
18	$2^1.3^2$	3.276e-11	43	p	1	68	$2^2.17^1$	3.276e-11	93	$3^1.31^1$	3.051e-5
19	p	1	44	$2^2.11^1$	3.276e-11	69	$3^1.13^1$	3.051e-5	94	$2^1.47^1$	3.051e-5
20	$2^2.5^1$	3.276e-11	45	$3^2.5^1$	3.276e-11	70	$2^1.5^1.7^1$	2.126e-12	95	$5^1.19^1$	3.051e-5
21	$3^1.7^1$	3.051e-5	46	$2^1.23^1$	3.051e-5	71	p	1	96	$2^5.3^1$	2.283e-18
22	$2^1.11^1$	3.051e-5	47	p	1	72	$2^3.3^2$	6.428e-18	97	p	1
23	p	1	48	$2^4.3^1$	6.490e-17	73	p	1	98	$2^1.7^2$	3.276e-11
24	$2^3.3^1$	2.842e-14	49	7^2	3.051e-5	74	$2^1.37^1$	3.051e-5	99	$3^2.11^1$	3.276e-11
25	5^2	3.051e-5	50	$2^1.5^2$	3.276e-11	75	$3^1.5^2$	3.276e-11	100	$2^2.5^2$	1.000e-15