Nombre de résidus quadratiques d'un nombre entier inférieurs à sa moitié

Denise Vella-Chemla

26.8.2016

On souhaiterait démontrer qu'on peut établir le caractère de primalité d'un entier n impair en comptant le nombre (qu'on note $R_b(n)$) de ses résidus quadratiques (non nuls, on le spécifie une fois pour toutes) qui sont inférieurs ou égaux à $n/2$.

Plus précisément, on induit de comptages effectués pour les nombres impairs jusqu'à 100 l'hypothèse suivante :

(H) Si le nombre $R_b(n)$ des résidus quadratiques d'un entier n inférieurs à $n/2$ est supérieur à $n/4$, n est premier ; sinon, n est composé.

Cette hypothèse s'écrit :

$$(H)\quad \forall n,\ n \text{ impair et } n \geq 3,$$
$$R_b(n) = \#\left\{ y \text{ tels que } \exists x \in \mathbb{N}^{\times},\ \exists k \in \mathbb{N},\ x^2 - kn - y = 0 \text{ avec } 0 < y \leq \frac{n-1}{2} \right\} > \frac{n}{4}$$
$$\iff$$
$$n \text{ premier}$$

On teste notre hypothèse en la programmant : on ne peut la tester très loin car l'élévation au carré dépasse vite les limites des entiers (la limite des "unsigned long int" en C++ ne permet de tester l'hypothèse que pour des entiers inférieurs à 300 000 car on utilise un programme simple). On réalise en programmant que les nombres premiers p de la forme $4k+1$ ont leur nombre de "petits résidus quadratiques" qui est égal à $\lfloor p/4 \rfloor$ tandis que les nombres premiers p de la forme $4k+3$ ont le nombre en question strictement supérieur à $\lfloor p/4 \rfloor$.

On va utiliser la notation $x\ R\ m$ pour exprimer que x est un résidu quadratique de m et la notation $x\ N\ m$ pour exprimer que x n'est pas un résidu quadratique de m.

On rappelle la définition de *x est un résidu quadratique de m* (notée $x\ R\ m$) :

$$x\ R\ m \iff \exists y \text{ tel que } x^2 \equiv y\ (mod\ m).$$

On a :

- $\forall x, y, m,\ x\ R\ m \text{ et } y\ R\ m \implies xy\ R\ m$
- $\forall x, y, m,\ x\ N\ m \text{ et } y\ N\ m \implies xy\ R\ m$
- $\forall x, y, m,\ x\ R\ m \text{ et } y\ N\ m \implies xy\ N\ m$

En annexe, sont fournis les résidus quadratiques des nombres entiers impairs de 3 à 51 inférieurs à leur moitié ainsi que leur nombre.

On rappelle qu'on peut déduire le caractère de résiduosité quadratique d'un nombre a premier à p un nombre premier impair par un simple calcul de puissance (cf. paragraphe 106 des Recherches arithmétiques de Gauss) :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}\ (mod\ p)$$

On rappelle que -1 est résidu quadratique de tout nombre premier de la forme $4k+1$ et n'est pas résidu quadratique de tout nombre premier de la forme $4k+3$ (cf. paragraphe 109 des Recherches arithmétiques de Gauss).

Ces particularités du caractère de résiduosité quadratique de -1 aux nombres premiers impairs ont pour conséquence que si p est un nombre premier impair de la forme $4k+1$ alors $r\ R\ p \iff -r\ R\ p$ tandis que si p est un nombre premier impair de la forme $4k+3$ alors $r\ R\ p \iff -r\ N\ p$.

Pour démontrer notre hypothèse, il faudrait démontrer :

1) qu'elle est vraie pour les nombres premiers de la forme $4k+1$;

2) qu'elle est vraie pour les nombres premiers de la forme $4k+3$;

3) qu'elle est vraie par élévation d'un nombre premier p à la puissance k ;

4) qu'elle est vraie par multiplication de deux nombres premiers simples ;

5) qu'elle est vraie par multiplication de deux puissances de nombres premiers (incluant peut-être (4)).

1) Pour les nombres premiers p de la forme $4k+1$, le nombre de résidus quadratiques de p inférieurs ou égaux à $p/2$ est trivialement égal à $\dfrac{p-1}{4}$ car r et $-r$ sont systématiquement soit tous deux résidus quadratiques de p soit tous deux non-résidus quadratiques de p et parce que seul l'un des deux dans chaque couple est inférieur ou égal à $p/2$.

2) Pour les nombres premiers p de la forme $4k+3$, Dirichlet a démontré qu'il y a davantage de petits résidus quadratiques de p que de petits non-résidus quadratiques de p en utilisant l'analyse infinitésimale[1] :

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \left(\frac{n}{p}\right) > 0.$$

Dans la suite, l'adjectif *petit* signifie *inférieur ou égal à* $p/2$ et *grand* signifie *supérieur strictement à* $p/2$.

Dans [1], on trouve les relations invariantes suivantes ; notons :

- $\sum R$ la somme des résidus quadratiques de p un nombre premier impair,
- $\sum N$ la somme de ses non-résidus quadratiques,
- $\sum R_b$ la somme de ses "petits" résidus quadratiques,
- $\sum N_b$ la somme de ses "petits" non-résidus quadratiques,
- $\sum R_h$ la somme de ses "grands" résidus quadratiques,
- $\sum N_h$ la somme de ses "grands" non-résidus quadratiques,
- R_b le nombre de ses petits résidus quadratiques ;
- N_b le nombre de ses petits non-résidus quadratiques.

On a, si $p \equiv 7\ (mod\ 8)$:

$$\begin{cases} \sum R_b = \sum N_b. \\ \dfrac{\sum N - \sum R}{p} = R_b - N_b. \end{cases}$$

On a, si $p \equiv 3\ (mod\ 8)$:

$$\begin{cases} \sum R - \sum N = \sum R_b - \sum N_b. \\ \dfrac{3(\sum N - \sum R)}{p} = R_b - N_b. \end{cases}$$

[1] Je ne parviens pas à trouver ce résultat de Dirichlet dont les références possibles sont *Applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, Journal de Crelle, 1839, vol. 19, p.324-369 ou vol. 21, p.1-12 ou p.134-155.

Concernant les nombres premiers de la forme $p = 8k + 7$, on réalise par le calcul, même si on ne sait pas le démontrer, que la somme des petits résidus quadratiques, qui est égale selon l'un des résultats de Victor-Amédée Lebesgue à la somme des petits non-résidus quadratiques, est égale à :

$$\sum R_b = \frac{(p-1)(p+1)}{16}.$$

Il y a sûrement de très nombreuses fonctions f qui sont telles que $f(7) = 3, f(23) = 33, f(31) = 60, f(47) = 138, f(71) = 315, f(79) = 390, f(103) = 663$ et $f(9967) = 6208818$ mais $f(p) = \frac{(p-1)(p+1)}{16}$ semble pertinente dans ce contexte.

On a ainsi deux ensembles, l'ensemble des petits résidus quadratiques et l'ensemble des petits non-résidus quadratiques, dont les sommes des éléments sont égales à $\frac{(p-1)(p+1)}{16}$, et dont on sait qu'ils sont de cardinaux différents. On sait également que 4 est toujours élément de l'ensemble des petits résidus quadratiques. Ces différents éléments ont peut-être pour conséquence qu'il y a forcément plus de petits résidus quadratiques que de petits non-résidus quadratiques.

Pour illustrer l'idée de la supériorité en nombre des petits résidus quadratiques, on peut présenter la multiplication modulaire modulo 7 sur 2 tables, l'une dans laquelle les nombres sont comme habituellement dans l'ordre croissant, l'autre dans laquelle les résidus quadratiques sont énumérés avant les non-résidus quadratiques.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

	1	2	4	3	5	6
1	1	2	4	3	5	6
2	2	4	1	6	3	5
4	4	1	2	5	6	3
3	3	6	5	2	1	4
5	5	3	6	1	4	2
6	6	5	3	4	2	1

Sur la table de multiplication modulaire modulo 23, la supériorité en nombre des petits résidus quadratiques sur les petits non-résidus quadratiques apparaît clairement dans le quart haut-gauche de la table. Ce sont peut-être les permutations qui perturbent l'ordre habituel sur les entiers lorsqu'on les considère comme étant des carrés modulaires qui a pour conséquence la loi qui nous semble être toujours vérifiée (ou du moins jusqu'à 300 000).

	1	2	3	4	6	8	9	12	13	16	18	5	7	10	11	14	15	17	19	20	21	22
1	1	2	3	4	6	8	9	12	13	16	18	5	7	10	11	14	15	17	19	20	21	22
2	2	4	6	8	12	16	18	1	3	9	13	10	14	20	22	5	7	11	15	17	19	21
3	3	6	9	12	18	1	4	13	16	2	8	15	21	7	10	19	22	5	11	14	17	20
4	4	8	12	16	1	9	13	2	6	18	3	20	5	17	21	10	14	22	7	11	15	19
6	6	12	18	1	13	2	8	3	9	4	16	7	19	14	20	15	21	10	22	5	11	17
8	8	16	1	9	2	18	3	4	12	13	6	17	10	11	19	20	5	21	14	22	7	15
9	9	18	4	13	8	3	12	16	2	6	1	22	17	21	7	11	20	15	10	19	5	14
12	12	1	13	2	3	4	16	6	18	8	9	14	15	5	17	7	19	20	21	10	22	11
13	13	3	16	6	9	12	2	18	8	1	4	19	22	15	5	21	11	14	17	7	20	10
16	16	9	2	18	4	13	6	8	1	3	12	11	20	22	15	17	10	19	5	21	14	7
18	18	13	8	3	16	6	1	9	4	12	2	21	11	19	14	22	17	7	20	15	10	5
5	5	10	15	20	7	17	22	14	19	11	21	2	12	4	9	1	6	16	3	8	13	18
7	7	14	21	5	19	10	17	15	22	20	11	12	3	1	8	6	13	4	18	2	9	16
10	10	20	7	17	14	11	21	5	15	22	19	4	1	8	18	2	12	9	6	16	3	13
11	11	22	10	21	20	19	7	17	5	15	14	9	8	18	6	16	4	3	2	13	1	12
14	14	5	19	10	15	20	11	7	21	17	22	1	6	2	16	12	3	8	13	4	18	9
15	15	7	22	14	21	5	20	19	11	10	17	6	13	12	4	3	18	2	9	1	16	8
17	17	11	5	22	10	21	15	20	14	19	7	16	4	9	3	8	2	13	1	18	12	6
19	19	15	11	7	22	14	10	21	17	5	20	3	18	6	2	13	9	1	16	12	8	4
20	20	17	14	11	5	22	19	10	7	21	15	8	2	16	13	4	1	18	12	9	6	3
21	21	19	17	15	11	7	5	22	20	14	10	13	9	3	1	18	16	12	8	6	4	2
22	22	21	20	19	17	15	14	11	10	7	5	18	16	13	12	9	8	6	4	3	2	1

On peut noter les symétries-miroir horizontale et verticale.

Intéressons-nous au cas qu'on avait numéroté (3) ci-dessus dans le cas où on parviendrait à démontrer formellement notre hypothèse, c'est à dire le fait que pour les nombres n qui sont des puissances de nombres premiers ($n = p^m$ avec p premier), il y a moins de $n/4$ petits résidus quadratiques qui sont inférieurs à $n/2$.

Pour le calcul du nombre de petits résidus quadratiques de p^k une puissance d'un nombre premier p (i.e. les résidus inférieurs ou égaux à $p/2$), on induit des formules en analysant les premières valeurs calculées par ordinateur pour 3 d'abord, car il semble se comporter différemment des autres, puis pour les puissances des nombres premiers de la forme $4k+1$ et enfin, pour les puissances des nombres premiers de la forme $4k+3$.

Des valeurs

$$\begin{aligned} R_b(9) &= 2, \\ R_b(27) &= 6, \\ R_b(81) &= 16, \\ R_b(243) &= 47, \\ R_b(729) &= 138, \\ R_b(2187) &= 412, \\ R_b(6561) &= 1232, \\ R_b(19683) &= 3693, \end{aligned}$$

on induit la formule suivante pour le nombre de petits résidus quadratiques des puissances de 3.

$$R_b(3^k) = \left\lceil \frac{3^{k-1}}{2} \right\rceil + R_b(3^{k-2}).$$

Des valeurs

$$\begin{aligned} R_b(25) &= 5, \\ R_b(125) &= 26, \\ R_b(625) &= 130, \\ R_b(3125) &= 651, \\ R_b(15625) &= 3255, \end{aligned}$$

pour les puissances de 5, puis

$$\begin{aligned} R_b(169) &= 39, \\ R_b(2197) &= 510, \\ R_b(28561) &= 6630, \end{aligned}$$

pour les puissances de 13, on trouve la formule suivante pour le nombre de petits résidus quadratiques des puissances de p pour p de la forme $4k+1$.

$$R_b(p^k) = kp^{k-1} + R_b(p^{k-2}).$$

Ce qu'il est amusant de constater, c'est que cette formule pour les $4k+1$ s'applique également au nombre premier 3 si ce n'est qu'il faut considérer celui-ci non pas comme un $4k+3$, ce qu'on a coutume de faire habituellement, mais plutôt comme un $4k+1$ avec k qui vaudrait $\frac{1}{2}$.

Des valeurs

$$\begin{aligned} R_b(7) &= 2, \\ R_b(49) &= 11, \\ R_b(343) &= 76, \\ R_b(2401) &= 526, \\ R_b(16807) &= 3678, \end{aligned}$$

pour les puissances de 7, puis

$$\begin{aligned} R_b(11) &= 4, \\ R_b(121) &= 29, \\ R_b(1331) &= 308, \\ R_b(14641) &= 3358, \end{aligned}$$

pour les puissances de 11, on induit que le nombre de petits résidus quadratiques des puissances de p pour p de la forme $4k+3$ (sauf 3) est d'un ordre proche de p fois le nombre de petits résidus quadratiques de la puissance de p juste inférieure :

$$R_b(p^k) \approx pR_b(p^{k-1}).$$

Il semble plus judicieux, par un principe de symétrie, de s'intéresser au nombre de grands non-résidus (i.e. supérieurs strictement à $\frac{n-1}{2}$), qu'on note $N_h(n)$. En effet, les valeurs des $N_h(7^k)$ ou des $N_h(11^k)$ sont :

$$\begin{aligned} N_h(7) &= 2, \\ N_h(49 = 7^2) &= 14, \\ N_h(343 = 7^3) &= 97, \\ N_h(2401 = 7^4) &= 676, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_h(11) &= 4, \\ N_h(121 = 11^2) &= 34, \\ N_h(1331 = 11^3) &= 363. \end{aligned}$$

L'approximation $N_h(p^k) \approx pN_h(p^{k-1})$ semble de meilleure qualité que l'approximation précédente.

Concernant les produits de puissances (point (5) évoqué plus haut), des valeurs suivantes de $N_h(n)$,

$$\begin{aligned} N_h(3.7) &= 7, \\ N_h(3^2.7) &= 25, \\ N_h(3.7^2) &= 52, \\ N_h(3^2.7^2) &= 178, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_h(5.7) &= 13, \\ N_h(5^2.7) &= 68, \\ N_h(5.7^2) &= 91, \\ N_h(5^2.7^2) &= 494, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_h(13.17) &= 79, \\ N_h(13^2.17) &= 1081, \\ N_h(13.17^2) &= 1399. \end{aligned}$$

on induit un ordre d'approximation pour $N_h(n)$ $(p < q)$:

$$N_h(p^m.q^n) \approx p.N_h(p^{m-1}.q^n)$$

Concernant les nombres de petits résidus quadratiques dont les valeurs suivent,

$$\begin{array}{ll} R_b(3.7) & = 4, \\ R_b(3^2.7) & = 9, \\ R_b(3.7^2) & = 22, \\ R_b(3^2.7^2) & = 45, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} R_b(5.7) & = 7, \\ R_b(5^2.7) & = 24, \\ R_b(5.7^2) & = 34, \\ R_b(5^2.7^2) & = 123, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} R_b(13.17) & = 31, \\ R_b(13^2.17) & = 355, \\ R_b(13.17^2) & = 479. \end{array}$$

même si on ne peut trouver de règles quant à leur progression, on constate que les valeurs étudiées vérifient toujours :

$$R_b(p^m.q^n) < p.R_b(p^{m-1}.q^n).$$

Le nombre de petits résidus quadratiques pour les puissances de nombres premiers de la forme $p = 4k+3$ (sauf dans le cas où $p = 3$) est toujours strictement inférieur à $\dfrac{p^k - 1}{4}$ car tous les multiples de p ne peuvent être résidus quadratiques des puissances successives de p, ce qui réduit d'autant le nombre de petits résidus quadratiques.

On peut maintenant démonter le mécanisme à l'oeuvre pour les produits, ce mécanisme ayant pour conséquence une très grande redondance des carrés obtenus, qui réduit d'autant leur nombre, le rendant toujours inférieur au quart du nombre n considéré.

Montrons ce mécanisme sur un exemple simple (en annexe, on fournira comme autre exemple la redondance des carrés dans le cas du nombre $n = 175 = 5^2.7$).

La combinatoire à l'oeuvre, même si elle montre clairement la réduction du nombre de petits résidus quadratiques pour les nombres composés, est trop compliquée pour nous permettre de trouver une formule qui donnerait directement ce nombre de petits résidus quadratiques en fonction de n.

Module $n = 35$ ($R_b(35) = 7$ et $7 < 35/4$)

34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	4	9	16	25	1	14	29	11	30	16	4	29	21	15	11	9

Les redondances de carrés pour le module 35 sont :

$$\begin{array}{rlll} 6^2 \equiv 1^2 \ (mod\ 35) & \text{car } (6-1).(6+1) = & 5.7 & \text{et } 35 \mid 35. \\ 11^2 \equiv 4^2 \ (mod\ 35) & \text{car } (11-4).(11+4) = & 7.15 = 105 & \text{et } 35 \mid 105. \\ 12^2 \equiv 2^2 \ (mod\ 35) & \text{car } (12-2).(12+2) = & 10.14 = 105 & \text{et } 35 \mid 140. \\ 13^2 \equiv 8^2 \ (mod\ 35) & \text{car } (13-8).(13+8) = & 5.21 = 105 & \text{et } 35 \mid 105. \\ 16^2 \equiv 9^2 \ (mod\ 35) & \text{car } (16-9).(16+9) = & 7.25 = 175 & \text{et } 35 \mid 175. \\ 17^2 \equiv 3^2 \ (mod\ 35) & \text{car } (17-3).(17+3) = & 14.20 = 280 & \text{et } 35 \mid 280. \end{array}$$

Il reste à étudier le cas des produits de nombres premiers simples, de la forme $p.q$ avec p et q premiers (le point (4) évoqué plus haut). L'étude suggère que le nombre de petits résidus quadratiques $R_b(pq)$ est proche de $\dfrac{R_b(p^2) + R_b(q^2)}{4}$, toujours inférieur à $\dfrac{pq}{4}$. Le mécanisme d'élimination des carrés redondants du fait de l'identité remarquable s'applique à nouveau, faisant diminuer d'autant le nombre de petits résidus quadratiques.

Enfin, si l'objectif est de démontrer formellement notre assertion en utilisant plutôt la théorie des groupes, peut-être que le fait suivant est à considérer pour le comptage des petits résidus quadratiques de produits de puissances de nombres premiers différents : il y a comme un "triangle" de produits qui se répondent ;

le produit d'un $8k+3$ et d'un $8k'+7$ est un $8k''+5$, celui d'un $8k+3$ et d'un $8k'+5$ est un $8k''+7$ et enfin, le produit d'un $8k+5$ et d'un $8k'+7$ est un $8k''+3$.

Conclusion

On réalise, une fois les mécanismes de redondance des carrés analysés et compris, qu'un critère bien plus simple permettant de distinguer les nombres impairs premiers des nombres impairs composés est que les nombres impairs premiers ont leur nombre de résidus quadratiques égal à $\frac{p-1}{2}$ tandis que les nombres impairs composés ont leur nombre de résidus quadratiques strictement inférieur à $\frac{p-1}{2}$.

Bibliographie

[1] Victor-Amédée Lebesgue, *Démonstrations de quelques théorèmes relatifs aux résidus et aux non-résidus quadratiques*, Journal de Mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville), 1842, vol.7, p.137-159.

Annexe 1 : Redondance des carrés pour le module $175 = 5^2.7$

Pour le module 175, on écrit, sous forme de couples, les nombres qui ont même carré, on ne précise pas l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ qui est telle que les factorisations des nombres $a-b$ et $a+b$ "contiennent" tous les facteurs de $175=5^2.7$:

$(16,9),(20,15),(23,2),(25,10),(30,5),(32,18),(37,12),(39,11),(40,5),(41,34),(44,19),$
$(45,10),(46,4),(48,27),(50,15),(51,26),(53,3),(55,15),(57,43),(58,33),(60,10),(62,13),$
$(64,36),(65,5),(66,59),(67,17),(69,6),(71,29),(72,47),(73,52),(74,24),(75,5),(76,1),$
$(78,22),(79,54),(80,10),(81,31),(82,68),(83,8),(85,15),(86,61),(87,38).$

De plus, 35 et 70 ont leur carré nul et on a pris comme convention de ne pas les compter comme petits résidus quadratiques.

Annexe 2 : petits résidus quadratiques des nombres impairs de 3 à 51 et leur nombre

Entre parenthèses est fournie la plus petite racine carrée d'un résidu quadratique du module considéré.

3 → 1. → 1
5 → 1. → 1
7 → 1, 2 (3). → 2
9 → 1, 4 (2). → 2
11 → 1, 3 (5), 4 (2), 5 (4). → 4
13 → 1, 3 (4), 4 (2). → 3
15 → 1, 4 (2), 6 (6). → 3
17 → 1, 2 (6), 4 (2), 8 (5). → 4
19 → 1, 4 (2), 5 (9), 6 (5), 7 (8), 9 (3). → 6
21 → 1, 4 (2), 7 (7), 9 (3). → 4
23 → 1, 2 (5), 3 (7), 4 (2), 6 (11), 8 (10), 9 (3). → 7
25 → 1, 4 (2), 6 (9), 9 (3), 11 (6). → 5
27 → 1, 4 (2), 7 (13), 9 (3), 10 (8), 13 (11). → 6
29 → 1, 4 (2), 5 (11), 6 (8), 7 (6), 9 (3), 13 (10). → 7
31 → 1, 2 (8), 4 (2), 5 (6), 7 (10), 8 (15), 9 (3), 10 (14), 14 (13). → 9
33 → 1, 3 (6), 4 (13), 9 (3), 12 (12), 15 (9), 16 (4). → 7
35 → 1, 4 (2), 9 (3), 11 (9), 14 (7), 15 (15), 16 (4). → 7
37 → 1, 3 (15), 4 (2), 7 (9), 9 (3), 10 (11), 11 (14), 12 (7), 16 (4). → 9
39 → 1, 3 (9), 4 (2), 9 (3), 10 (7), 12 (18), 13 (13), 16 (4). → 8
41 → 1, 2 (17), 4 (2), 5 (13), 8 (7), 9 (3), 10 (16), 16 (4), 18 (10), 20 (15). → 10
43 → 1, 4 (2), 6 (7), 9 (3), 10 (15), 11 (21), 13 (20), 14 (10), 15 (12), 16 (4), 17 (19), 21 (8). → 12
45 → 1, 4 (2), 9 (3), 10 (10), 16 (4), 19 (8). → 6
47 → 1, 2 (7), 3 (12), 4 (2), 6 (10), 7 (17), 8 (14), 9 (3), 12 (23), 14 (22), 16 (4), 17 (8), 18 (21), 21 (16). → 14
49 → 1, 2 (10), 4 (2), 8 (20), 9 (3), 11 (16), 15 (8), 16 (4), 18 (19), 22 (13), 23 (11). → 11
51 → 1, 4 (2), 9 (3), 13 (8), 15 (24), 16 (4), 18 (18), 19 (11), 21 (15), 25 (5). → 10