Pgcd et trajets de booléens (Denise Vella-Chemla, 22.10.2016)

Dans une note récente, on a calculé par programme les racines de l'unité (notées x) des entiers successifs (notés n), i.e. les nombres dont la division d'une puissance x^k par n avait pour reste 1 (x est tel que $\exists k, 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ x^k \equiv 1\ (mod\, n)$). On rappelle que deux nombres x et n *premiers entre eux* ont leur plus grand commun diviseur ($pgcd(x,n)$) égal à 1. On a réalisé en étudiant les racines de l'unité que seul un nombre *premier à* n peut avoir l'une de ses puissances congrue à 1 modulo n.

On se propose ici d'étudier une table de booléens associés à la relation *premier à* qui lie deux nombres. Dans cette table, pour les nombres x compris entre 1 et 52, on note pour chaque nombre y compris entre 1 et 26 la valeur de vérité (booléenne) de $(x,y)=1$ (le booléen de la case (x,y) de la table vaut donc 1 pour tout nombre y premier à x et 0 pour les autres s'il y en a)[1]. On note en couleur quelques trajets de nombres à observer.

On constate (table suivante) que des nombres $p-1$ précédant ou $p+1$ succédant à un nombre premier p (sur le bord gauche de la table) partent des trajets (de couleur rouge), constituées exclusivement de plus grands communs diviseurs valant 1 à cause des relations :

$$\begin{array}{ll} \forall\, p\, premier, & \forall x, 1 \leqslant x \leqslant p-1, (p-x, x) = 1. \\ & \forall x, 1 \leqslant x \leqslant p-1, (p+x, x) = 1. \end{array}$$

Du coup, on a comme l'impression que 23 nous "a amenée" à 29.

On constate aussi que les mots correspondant aux trajets montant et descendant de deux nombres séparés de 2 sont identiques. On a coloré dans la deuxième table les mots associés à 5 et 7 en rouge, à 17 et 19 en vert, ou encore à 24 et 26 en cyan.

[1] On note parfois le plus grand commun diviseur de x et y ($pgcd(x,y)$) en utilisant le symbole $\wedge$ (et logique) : $x \wedge y = 1$).

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	**1**	1	1
2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	**1**	0
3	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	**1**	0	1	1	0	1	**1**
4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	**1**	0
5	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	**1**	1	0	1	1	1	**1**	0	1
6	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0	**1**	0	1	0
7	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	**1**	1	1	1	1	0	**1**	1	1	1	1
8	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0
9	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	**1**	0	1	1	0	1	**1**	0	1	1	0	1	1
10	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	**1**	0	0	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	0	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	**1**	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	0	1	1	1	1
12	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0	1	0	1	0
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	0	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
14	1	0	1	0	1	0	0	0	**1**	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
15	1	1	0	1	0	0	1	**1**	0	0	1	0	1	**1**	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
16	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
17	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
19	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
20	1	0	**1**	0	0	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
21	1	**1**	0	1	1	0	0	**1**	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
22	**1**	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
23	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
24	1	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
25	1	1	1	**1**	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
26	1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
27	1	**1**	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
28	**1**	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
32	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
33	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
34	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
35	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1
36	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
38	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
39	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
40	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
42	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
44	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
45	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
46	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
48	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
49	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
50	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
51	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
52	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1
2	1	0	1	**0**	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	**0**	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0
3	1	1	**0**	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	**0**	1	1	0	1	1	0	**1**	1	0	1	1
4	1	**0**	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	**0**	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0
5	**1**	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	**1**	1	0	1	1	1	1	**0**	1	1	1	1	0	1
6	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	**0**	1	0	0	0	1	0	**1**	0	0	0	1	0	1	0
7	**1**	1	1	1	1	1	0	1	1	1	**1**	1	1	0	1	1	1	**1**	1	1	0	1	1	1	1	1
8	1	**0**	1	0	1	0	1	0	1	**0**	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0
9	1	1	**0**	1	1	0	1	1	**0**	1	1	0	1	1	0	**1**	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
10	1	0	1	**0**	0	0	1	**0**	1	0	1	0	1	0	**0**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
11	1	1	1	1	**1**	1	**1**	1	1	1	0	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
12	1	0	0	0	1	**0**	1	0	0	0	1	0	**1**	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
13	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	**1**	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
14	1	0	1	**0**	1	0	0	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
15	1	1	**0**	1	0	0	1	1	0	**0**	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
16	1	**0**	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
17	**1**	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	0	0	0	1	0	**1**	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
19	**1**	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
20	1	**0**	1	0	**0**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
21	1	1	**0**	**1**	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
22	1	0	**1**	**0**	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
23	1	**1**	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
24	**1**	0	0	0	1	**0**	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
25	1	1	1	1	0	1	**1**	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
26	**1**	0	1	0	1	0	1	**0**	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
27	1	**1**	0	1	1	0	1	1	**0**	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
28	1	0	**1**	0	1	0	0	0	1	**0**	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
29	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	1	0	0	0	**0**	0	1	0	0	0	1	**0**	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
31	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
32	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	**0**	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
33	1	1	0	1	1	0	1	**1**	0	1	0	0	1	1	**0**	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
34	1	0	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	**0**	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
35	1	1	1	1	0	1	0	1	1	**0**	1	1	1	0	0	1	**1**	1	1	0	0	1	1	1	0	1
36	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
38	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
39	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	**1**	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
40	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	**0**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
42	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0	1	0	1	0
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1
44	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	0
45	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	**0**	0	1	1	0	0	1
46	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	**1**	0	0	0	1	0
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1
48	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	**1**	0	1	0
49	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	**1**	1	1
50	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
51	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
52	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0