Utiliser la piste de la méthode d'Euler pour trouver une récurrence pour la somme des diviseurs pour trouver également une récurrence pour calculer le nombre de décompositions de Goldbach des nombres pairs : où elle mène vraiment, sous quel nom, et sur quel mur précis

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, septembre 2026.

Résumé

Trois tentatives (chatgpt, claude, deepseek) ont cherché à reproduire, sur le polynôme de Goldbach $P(x)^2$, le procédé formel (dérivée logarithmique) par lequel Euler tire sa récurrence pour $\sigma(n)$, et ont buté sur l'absence d'un analogue des nombres pentagonaux. On montre ici que ce n'est pas un échec de recherche mais une conséquence structurelle : le procédé d'Euler exige que le coefficient à expliquer soit *déjà* une somme alternée sur une famille combinatoire, ce que $a_n = \mathbf{1}[n \text{ premier}]$ n'est pas. On montre ensuite que la vraie transposition de l'idée d'Euler à une piste de démonstration de la conjecture de Goldbach existe, porte un nom, et a une histoire d'un siècle : c'est le crible (Legendre, Brun, Selberg) côté combinatoire, et la méthode du cercle (Hardy-Littlewood) côté analytique - la seconde ayant déjà donné un résultat fort et réel (presque tout nombre pair est somme de deux premiers). On répond enfin, précisément, à la question géométrique posée à deepseek sur le pliage de la feuille.

1. Ce que les trois tentatives ont établi, et ce qui manque à leur diagnostic

Les trois notes obtiennent, par des voies équivalentes, la même identité exacte

$$n\,g_n = 2\sum_{k=1}^{n} t_k\, g_{n-k}, \qquad T(y) = y\frac{A'(y)}{A(y)} = \sum_n t_n y^n,$$

et constatent que (t_n) est dense et sans structure simple, contrairement à la série pentagonale d'Euler. Leur diagnostic s'arrête à : *"il manque une seconde expression close de $A(y)$, analogue au produit $\prod(1-x^n)$"*. C'est vrai, mais incomplet : cela ne dit pas *pourquoi* on ne doit pas s'attendre à en trouver une. La section suivante comble ce manque.

2. Le bon diagnostic : ce qui fait fonctionner l'idée de Franklin, et pourquoi $A(y)$ n'a rien à lui offrir

Le mécanisme d'Euler-Franklin n'est pas un tour algébrique isolé : c'est une méthode qui s'applique à des coefficients d'un type précis. Développons formellement

$$\prod_{n\geq 1}(1-x^n) = \sum_{S\subset\mathbb{N},\ |S|<\infty} (-1)^{|S|}\, x^{\sigma(S)},$$

où S parcourt les parties finies de $\mathbb{N}^*$ et $\sigma(S) = \sum_{k\in S} k$. Le coefficient de x^N est donc une *somme alternée sur une grande famille combinatoire* : l'ensemble (exponentiellement gros, pour N grand) des partitions de N en parts distinctes. C'est cette richesse combinatoire - beaucoup d'objets, une notion naturelle de "déplacer un morceau du diagramme" - qui permet à Franklin de construire une involution presque partout sans point fixe, ne laissant subsister que les tailles pentagonales.

Proposition 1 (Ce qui manque à $A(y)$)**.** *Le coefficient* $a_n = \mathbf{1}[2n+3$ *premier*$]$ *n'est pas une somme alternée sur une famille combinatoire de cardinal variable : c'est directement la réponse (0 ou 1) à une question arithmétique sur l'entier* $2n+3$ *lui-même. Il n'y a donc, pour la méthode de Franklin, aucune matière première sur laquelle construire une involution : rien à apparier, rien à faire glisser, aucun "diagramme" associé à* a_n*.*

C'est la raison structurelle, plus profonde que "$P(x)$ est une somme et non un produit" (déjà notée par claude), pour laquelle le procédé logarithmique appliqué à $A(y)$ ou à son produit d'Euler formel (les t_n, les c_n des notes précédentes) ne pouvait pas se simplifier : on cherchait la involution au mauvais endroit.

Remarque : En revanche, $g(n) = \#\{(p,q) : p+q = n\}$, lui, *est* un objet du bon type : c'est un compte (non signé, pour l'instant) sur une vraie famille combinatoire - l'ensemble des décompositions de n. La méthode d'Euler, transposée correctement, doit donc chercher son involution non pas sur $A(y)$ traité comme un produit fictif, mais directement sur les objets qui *comptent* $g(n)$, ou sur une famille plus grande qui les contient avec signe. C'est exactement ce vers quoi pointe la section suivante - et cette route existe déjà, en fait, depuis un siècle.

3. Où vit réellement la méthode d'Euler fournissant la récurrence de la somme des diviseurs lorsqu'on essaie de l'appliquer au problème de la conjecture de Goldbach : le crible

La transposition directe et correcte de l'idée d'Euler - une somme alternée sur une famille combinatoire, dont ne survivent que des termes rares - a un nom : c'est la **formule de crible de Legendre**. Pour compter les entiers $\leq N$ premiers avec $\prod_{r\leq\sqrt{N}} r$ (donc les nombres premiers, à constante près), Legendre écrit exactement une somme alternée sur les parties finies de l'ensemble des petits premiers :

$$\#\{n \leq N : \mathrm{pgcd}(n, \textstyle\prod_{r\leq\sqrt{N}} r) = 1\} = \sum_{d \mid \prod_{r\leq\sqrt{N}} r} \mu(d) \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor,$$

où μ est la fonction de Möbius - c'est-à-dire une somme sur les parties S de l'ensemble des petits premiers, avec signe $(-1)^{|S|}$, exactement comme le produit d'Euler. Appliquée à la condition double "p premier *et* $n-p$ premier", elle donne une formule exacte, non asymptotique, pour $g(n)$ - c'est très précisément ce que le document *tentative combinatoire d'approche de la conjecture de Goldbach* avait déjà mis en place (réduction à R_N, inclusion-exclusion sur les classes de résidus interdites modulo les petits premiers).

Remarque : Le crible de Legendre *est* la matière première combinatoire que $A(y)$ n'offrait pas : une somme alternée sur $2^{\pi(\sqrt{N})}$ parties finies. C'est bien l'analogue exact de la construction de Franklin - à ceci près que personne, en un siècle et demi, n'a trouvé d'involution qui en épargne seulement une poignée de termes comme le fait Franklin pour les partitions.

4. Le mur, précisément nommé : le problème de parité

Ce n'est pas faute d'avoir essayé. Brun (1920) puis Selberg tronquent la somme de Legendre (ne retiennent que les d ayant peu de facteurs premiers) pour la rendre maniable, et obtiennent des majorations et minorations exploitables - c'est ce qui donne, via Chen (1966), que tout n pair assez grand s'écrit $n = p + q_1 q_2$ avec p premier et $q_1 q_2$ ayant au plus deux facteurs premiers. Mais aucun crible construit par ce type de poids ne peut, structurellement, isoler les entiers ayant un nombre *pair* de facteurs premiers de ceux en ayant un nombre *impair* - c'est le **problème de parité**, démontré (Selberg, puis formalisé par Bombieri) comme une limitation intrinsèque des poids de crible usuels, et non un simple manque d'habileté technique. C'est le même mur, nommé avec précision, que celui déjà rencontré dans la note sur le pavage à 16 tuiles : la lettre a (les deux bits premiers) résiste à toute récurrence syndétique inconditionnelle pour la même raison de fond.

5. L'autre transplant, analytique : la méthode du cercle

Il existe une seconde façon, non combinatoire, de "sommer sur toutes les configurations" : évaluer $P(x)^2$ non pas formellement mais sur le cercle unité, $x = e^{2\pi i\alpha}$, et intégrer :

$$g(n) = \int_0^1 P(e^{2\pi i\alpha})^2 \, e^{-2\pi i n\alpha} \, d\alpha.$$

C'est la méthode du cercle de Hardy et Littlewood (1923), déjà mentionnée dans la note de claude. Elle ne cherche pas de récurrence finie mais une asymptotique directe de l'intégrale, en séparant arcs majeurs (où α est proche d'une fraction à petit dénominateur, contribution principale $\sim \mathfrak{S}(n)\, n/(\ln n)^2$, la constante singulière de Hardy-Littlewood) et arcs mineurs (contribution qu'on espère négligeable).

Théorème 2 (Montgomery-Vaughan, 1975)**.** *L'ensemble des entiers pairs $n \le X$ qui ne sont pas somme de deux nombres premiers a un cardinal $\mathrm{O}(X^{1-\delta})$ pour un $\delta > 0$ explicite.*

C'est un résultat réel et fort, obtenu précisément en poussant à son terme la méthode du cercle sur $P(x)^2$: *presque tout* nombre pair est somme de deux premiers, inconditionnellement. Ce qui bloque encore le passage à *tout* nombre pair est le contrôle des arcs mineurs : on ne sait borner leur contribution que par une inégalité moyenne (en moyenne sur n, elle est petite), pas point par point pour chaque n individuellement - un obstacle de nature différente du problème de parité, mais tout aussi précisément identifié et documenté depuis un siècle.

6. Réponse à la question posée à deepseek : le pliage de la feuille

La question était juste, et sa réponse est maintenant précise. L'involution de Franklin déplace un morceau (la dernière ligne, ou la diagonale) du diagramme de Ferrers d'une partition - une opération possible parce qu'une partition est une *suite de parts modifiable*, un objet à plusieurs degrés de liberté. Une décomposition de Goldbach $n = p + q$ n'est, elle, qu'un *point* (p, q) sur la droite $p + q = n$: il n'y a rien à l'intérieur d'un point à faire glisser, aucun "bas" ni "pente" à comparer. Chercher un pliage à la Franklin sur (p, q) lui-même est donc voué à l'échec - non par manque

d'imagination, mais parce que l'objet est de la mauvaise dimension.

La vraie géométrie derrière la conjecture de Goldbach n'est pas celle d'un diagramme qu'on plie : c'est celle du *cercle unité* de la méthode de Hardy-Littlewood, découpé en arcs de Farey emboîtés selon les fractions a/q - une géométrie réelle, mais d'une nature complètement différente (analytique, liée à l'approximation diophantienne) de celle des diagrammes de Ferrers. C'est là, historiquement, que l'intuition "il faut une bonne image géométrique" a été la plus féconde pour attaquer la conjecture de Goldbach - pas dans le pliage des partitions, mais dans le découpage du cercle.

7. Bilan

Essayer d'appliquer les idées qu'a eues Euler pour calculer la somme des diviseurs au problème de la conjecture de Goldbach n'est pas restée sans suite faute d'avoir été essayée avec assez de soin : elle a été essayée, sous ses deux formes correctes (crible combinatoire, méthode du cercle analytique), par les plus grands noms de la théorie des nombres du vingtième siècle, et elle a produit des résultats forts et réels - Chen (1966), Montgomery-Vaughan (1975), Vinogradov puis Helfgott pour le problème ternaire. Elle bute, aux deux endroits, sur des obstacles nommés et compris (parité ; contrôle des arcs mineurs), pas sur un manque d'ingéniosité algébrique. Le tour logarithmique testé par les trois notes précédentes ne pouvait pas aboutir pour une raison précise (§ 2) - mais l'instinct qui l'a motivé était le bon, et il a déjà, historiquement, porté ses fruits ailleurs, sous d'autres noms.