

1 Produit semi-direct

1.1 Phrase à expliquer

Les phrases à expliquer sont : “*Mais il est facile de voir pour le produit semi-direct $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$, $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ que l’on a bien une algèbre associée à un feuilletage.*”

Précision du contexte : quand Γ n’est pas de type I, l’espace X dual de Γ est “pathologique” si on lui applique les concepts classiques de la topologie.

Un *produit direct* $G \times H$ de deux groupes est formé des couples (g, h) que l’on multiplie composante par composante : les deux groupes s’ignorent.

Dans un *produit semi-direct*, le deuxième groupe *agit* sur le premier. Ici, les éléments de $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ sont des couples (v, n) , avec v un point à coordonnées entières du plan et n un entier, multipliés ainsi :

$$(v, n) \cdot (w, m) = (v + \alpha^n w, n + m).$$

Autrement dit, quand n “passe devant” w , il transforme w par la matrice α , n fois de suite.

La matrice $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ a pour déterminant $1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$: elle est inversible à coefficients entiers, donc c’est une bijection de $\mathbb{Z}^2$ qui respecte l’addition. Si α était la matrice identité, on retrouverait le produit direct. Ici le groupe n’est pas commutatif : l’ordre des facteurs compte.

1.2 Sens de cette phrase

Pour un groupe Γ qui n’est pas de type I, l’espace dual X est un fouillis que la topologie ordinaire ne sait pas traiter. Mais pour cet exemple précis, on voit facilement qu’on peut lui associer une algèbre, et que cette algèbre est celle d’un feuilletage. Le mécanisme :

1. Le dual de $\mathbb{Z}^2$ est un tore T^2 (la surface d’un pneu, ou un carré dont on recolle les bords). La matrice α agit aussi sur ce tore : elle l’étire dans une direction et le comprime dans une autre.
2. on fait “voyager” le tore dans une troisième dimension, et on recolle le bout à l’autre bout en appliquant α . On obtient une variété de dimension 3.
3. cette variété est découpée en *feuilles* : des lignes qui avancent dans la troisième direction, comme les fibres d’un tissu. C’est le *feuilletage*.
4. l’espace des feuilles est le tore quotienté par α , c’est-à-dire que l’on identifie deux points quand l’un est l’image de l’autre par α répétée. Or ces orbites s’enroulent de façon dense dans le tore, donc le quotient est inutilisable avec la topologie classique : deux points “différents” ne peuvent pas être séparés.

5. l’auteur remplace alors cet espace de feuilles inutilisable par une algèbre, ici $C(T^2) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$, qui est justement $C^*(\Gamma)$. C’est le principe de la géométrie non commutative : quand l’espace quotient est trop sauvage, on travaille avec l’algèbre à la place.

Donc la phrase signifie : pour cet exemple, le groupe “pathologique” Γ et l’algèbre du feuilletage décrit ci-dessus sont une seule et même chose.

Effectivement, le lien entre ce produit semi-direct et la géométrie des feuilletages est un classique de la géométrie non commutative (Alain Connes) et de la théorie des systèmes dynamiques. La matrice que vous mentionnez, $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, est la célèbre matrice d’Anosov (ou le “chat d’Arnold”). Elle est symétrique, à coefficients entiers, et son déterminant vaut 1, ce qui signifie qu’elle induit un automorphisme de $\mathbb{Z}^2$, et par extension un difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

1.3 Éléments explicatifs supplémentaires

Voici comment on voit géométriquement et algébriquement qu’il s’agit de l’algèbre d’un feuilletage :

1.3.1 Le feuilletage de Kronecker stable/instable

Les valeurs propres de la matrice α sont données par le polynôme caractéristique $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$: $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ (valeur propre instable) et $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ (valeur propre stable).

Puisque les pentes des vecteurs propres associés sont irrationnelles (liées au nombre d’or ϕ), les directions propres définissent deux flots linéaires sur le tore $\mathbb{T}^2$ dont les orbites sont denses. Ces lignes parallèles s’enroulent indéfiniment sans jamais se refermer, formant un feuilletage de Kronecker sur le tore $\mathbb{T}^2$.

1.3.2 Du tore d’Anosov au produit semi-direct

Si l’on construit la variété de suspension (la variété de dimension 3 obtenue en recollant les deux extrémités du cylindre $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ via l’application α), le groupe fondamental de cette variété 3D est précisément notre produit semi-direct : $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$.

Le feuilletage du tore par les directions propres est invariant par α . En passant à la suspension, il donne naissance à un feuilletage de codimension 1 (par des feuilles bidimensionnelles denses) sur cette variété de dimension 3 (qui est un espace homogène d’un groupe de Lie résoluble, le groupe de Sol).

1.3.3 L’algèbre associée (Le produit croisé)

En géométrie non commutative, l’algèbre d’un feuilletage (la C^* -algèbre associée à son groupoïde) est conçue pour remplacer l’espace des feuilles quand celui-ci est topologiquement singulier (ici, toutes les feuilles sont denses). Pour ce feuilletage, l’algèbre de von Neumann ou la C^* -algèbre du feuilletage est isomorphe au produit croisé : $C^*(\Gamma) \cong C^0(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$.

Comme la dynamique de la matrice d’Anosov α est fortement ergodique (le système est l’archétype des systèmes chaotiques), l’algèbre obtenue est une algèbre simple (elle n’a pas d’idéaux bilatères non triviaux), reflétant parfaitement le fait que chaque feuille intersecte n’importe quel ouvert de la variété.

La structure de la variété de Sol et le calcul de sa K-théorie sont des sujets fascinants. Explorons la structure de la variété de Sol de dimension 3 obtenue par cette suspension.

Voici comment cette variété se construit géométriquement et s’interprète comme un espace homogène.

1.3.4 La construction géométrique par suspension

La variété de dimension 3, souvent notée M_α , est le quotient de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ par l’action de $\mathbb{Z}$ donnée par : $(x, y, t) \sim (\alpha(x, y), t + 1)$.

Puisque la matrice d’Anosov $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ préserve le réseau $\mathbb{Z}^2$, cette action est bien définie. Localement, la variété ressemble à un produit, mais globalement, faire un tour complet le long de la direction “temporelle” t revient à appliquer une torsion hyperbolique (le “chat d’Arnold”) sur le tore transverse.

1.3.5 Le lien avec le groupe de Lie résoluble Sol

Le groupe de Lie Sol est l’un des huit modèles géométriques de Thurston pour les variétés de dimension 3. Il peut être représenté comme $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ avec la loi de groupe : $(x, y, t) \cdot (x', y', t') = (x + e^{-t}x', y + e^t y', t + t')$.

Dans notre cas, la matrice α possède deux valeurs propres $\lambda_1 = e^\theta > 1$ et $\lambda_2 = e^{-\theta} < 1$ (où $\theta = \ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$). En changeant de base pour s’aligner sur les directions propres de α , l’action de la matrice devient purement diagonale : une direction est dilatée par e^θ et l’autre est contractée par $e^{-\theta}$. La variété de suspension M_α est un quotient compact de ce groupe de Lie : $M_\alpha = \Gamma \backslash \text{Sol}$ où $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ est le sous-groupe discret (le réseau) que vous avez mentionné.

1.3.6 La géométrie du feuilletage de codimension 1

Sur le groupe Sol, les plans définis par $y = \text{constante}$ (direction instable + direction translatée) et $x = \text{constante}$ (direction stable + direction translatée) forment deux feuilletages invariants à gauche. En passant au quotient par Γ :

- les feuilles de ces feuilletages deviennent des surfaces (dimension 2) qui s’enroulent de manière dense dans la variété de dimension 3.
- c’est l’exemple type d’un feuilletage dont l’espace des feuilles est une “horreur” topologique (tous les points sont indiscernables pour la topologie grossière), ce qui justifie pleinement l’arsenal de la géométrie non commutative d’Alain Connes pour étudier son algèbre d’opérateurs.

1.4 L'action de la matrice d'Anosov α_*

L'automorphisme α induit une application sur les groupes de K-théorie. Regardons comment la matrice $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ agit sur chaque groupe :

Sur K_1 (Les enroulements)

L'action sur les cycles fondamentaux du tore est exactement donnée par la matrice elle-même.

L'application α_* sur $\mathbb{Z}^2$ est donc la multiplication par $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

L'opérateur de la suite exacte est : $\text{id} - \alpha_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ Le déterminant de cette matrice vaut $(0)(-1) - (-1)(-1) = -1$. Puisque le déterminant vaut ± 1 , cette application est un isomorphisme de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{Z}^2$. Son noyau est nul, et son image est $\mathbb{Z}^2$ tout entier.

Sur K_0 (Les fibrés)

- Le fibré trivial (la dimension) est invariant par le difféomorphisme, donc $\alpha_*(1) = 1$.
- Le fibré de Bott (le volume orienté du tore) est également préservé car $\det(\alpha) = 1$, donc l'orientation et le volume global sont conservés. Sur K_0 , l'application α_* agit comme l'identité. L'opérateur de la suite exacte devient : $\text{id} - \alpha_* = \text{id} - \text{id} = 0$

2 Dans un autre article, qu'est-ce que le problème des trois points

Il est énoncé à la fin de la page 219 et au début de la page 220. Voici ce dont il s'agit.

La situation. Prenez la droite projective (une sphère : le plan complexe plus un point à l'infini, c'est ce que Grothendieck appelle "genre 0") et enlevez-lui trois points, par exemple 0, 1 et ∞ . On cherche à décrire tous les "revêtements" finis de cette sphère trouée qui ne sont ramifiés qu'en ces trois points.

Revêtement ramifié. L'exemple le plus simple est l'application $z \mapsto z^2$. Au-dessus de chaque point, sauf 0 et ∞ , il y a deux antécédents (les deux racines carrées) ; en 0 et en ∞ , les deux se rejoignent : c'est la ramification. On cherche donc toutes les façons "d'enrouler" un espace sur la sphère trouée, en ne se permettant de rejoindre les feuillets qu'aux trois points enlevés.

Traduction en groupes. Faire un tour autour de chacun des trois points donne trois "lacets" $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Sur une sphère, ces trois lacets se compensent : $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 1$. Les revêtements galoisiens (ceux qui ont le plus de symétrie) correspondent alors aux groupes finis G engendrés par trois éléments $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ avec cette relation. Le problème des trois points demande donc : tout groupe

fini engendré par trois éléments de produit 1 provient-il d'un tel revêtement ?

Ce que dit Grothendieck. Sur les nombres complexes, la réponse est oui, par la topologie classique. Dans son texte, il montre que c'est encore vrai sur un corps de caractéristique p (comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, les corps que vous connaissez), à condition que l'ordre du groupe G soit premier à p . Il le déduit du corollaire de la page 219, en passant par les courbes en caractéristique 0 qu'il a construites plus haut (théorème 9).

C'est un problème célèbre : les revêtements de la sphère privée de trois points ont ensuite mené à la théorie de Belyi et aux “dessins d'enfants” de Grothendieck, qui sont des graphes dessinés sur des surfaces.

3 Références

[1] Alain Connes, Leçon inaugurale au Collège de France.

<https://alainconnes.org/wp-content/uploads/lecollege.pdf>.

Transcription en L^AT_EX :

https://denisevellachemla.eu/A.Connes_L__inaug.pdf .

[2] Alexandre Grothendieck, Géométrie formelle et géométrie algébrique, Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. no 182, p. 193-220.