Projections, une façon marrante de voir la recherche des décomposants de Goldbach, Denise Vella-Chemla, mars 2023.

Dans la dernière modélisation qu'on a choisie, les nombres sont représentés par leurs restes modulaires dans un réseau de Minkowski à $d = \pi(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)$ dimensions, on élimine les points des hyperplans contenant 0 et les points des hyperplans contenant n, et on souhaiterait être assuré qu'il reste un nombre $\leq n/2$ non éliminé dans le réseau de points après élimination des points de ces hyperplans.

Qu'est-ce qui permet de caractériser les points extérieurs à tous les hyperplans qu'on a dit "de coupure" (i.e. les points intérieurs aux sous-espaces convexes délimités par les hyperplans) ? Ils sont systématiquement différents de leurs projections sur les plans en question, puisqu'ils ne doivent pas appartenir à ces hyperplans.

Du coup, de façon marrante, on utilise des matrices de projections de l'espace affine ; prenons l'exemple de la recherche des décomposants de Goldbach du nombre 40 dans l'espace $2 \times 3 \times 5$. On rappelle qu'il a pour restes (0,1,0).

On a d'une part les matrices des projections sur les "hyperplans nuls" (respectivement $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$). On ajoute une coordonnée fictive à tous les vecteurs pour gérer le côté affine de la chose. Les matrices des 3 projections en questions sont :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de projection sur le seul hyperplan autre que les hyperplans nuls à éliminer, ici le plan $y = 1$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on a effectivement que les nombres 11 et 17 ne sont jamais égaux à leur image selon chacune des 4 projections ci-dessus.

Les programmes python à la va-vite sont là :
http://denise.vella.chemla.free.fr/pgm-marrant-py-40.pdf
http://denise.vella.chemla.free.fr/pgm-marrant-py-98.pdf

Leur résultat pour vérification est là :
http://denise.vella.chemla.free.fr/res-marrant-py-40.pdf
http://denise.vella.chemla.free.fr/res-marrant-py-98.pdf

Pour la recherche des décomposants de Goldbach de 98, on projette dans $2 \times 3 \times 5 \times 7$. Il faut éliminer en plus des hyperplans nuls les hyperplans 2 (mod 3) ($x_2 = 2$) et 3 (mod 5) ($x_3 = 3$) par les matrices :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Cette vision par les projections permettrait-elle d'assurer l'existence d'un point du réseau au moins qui n'est égal à aucune de ses images par les différentes projections à envisager (les projections orthogonales sur les hyperplans nuls, et les projections orthogonales sur les hyperplans contenant n) ?...