*Traduction du paragraphe 3.3 du chapitre 2, p. 328 et suivantes, du livre Noncommutative geometry, quantum fields and motives, d'Alain Connes et Matilde Marcolli (Denise Vella-Chemla, juin 2021)*

**3.3. Système quantique et fonctions prolates.**

Le passage du système classique au système quantique remplace l'intégration de la forme symplectique sur une région de l'espace des phases par un comptage des états quantiques dans une limite d'énergie donnée.

Le système classique $(X, h)$ décrit au § 3.2 ci-dessus est facile à quantifier. L'espace mécanique quantique de Hilbert est simplement donné par

(2.50) $$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})^{\mathrm{pair}},$$

c'est-à-dire l'espace des fonctions paires de carré intégrable $f(q)$. Exiger que les fonctions soient paires reflète simplement la symétrie discrète $(p, q) \mapsto (-p, -q)$ définissant $X$ dans le cadre classique.

L'hamiltonien $H$ génère le groupe des transformations d'échelle, qui est donné par la représentation naturelle $\vartheta_{\mathrm{a}}$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathcal{H}$, de la forme

(2.51) $$(\vartheta_{\mathrm{a}}(\lambda)f)(q) = f(\lambda^{-1}q).$$

Celui-ci est unitaire après multiplication par $|\lambda|^{-1/2}$ de sorte que la représentation

(2.52) $$\lambda \mapsto |\lambda|^{-1/2}\vartheta_{\mathrm{a}}(\lambda)$$

est unitaire. Pour $h \in \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on définit les opérateurs correspondants

(2.53) $$\vartheta_{\mathrm{a}}(h) = \int_{\mathbb{R}_+^*} h(\lambda)\vartheta_{\mathrm{a}}(\lambda)d^*\lambda$$

avec $d^*\lambda = \dfrac{d\lambda}{\lambda}$ la mesure multiplicative de Haar sur $\mathbb{R}_+^*$.

Au cutoff infrarouge $|q| \leq \Lambda$ correspond la projection orthogonale $P_\Lambda$ sur le sous-espace

(2.54) $$P_\Lambda = \{f \in L^2(\mathbb{R})^{\mathrm{pair}} \mid f(q) = 0, \forall q \text{ avec } |q| > \Lambda\}.$$

Pour définir le cutoff ultraviolet, on utilise la transformée de Fourier, qui est définie comme suit pour les groupes abéliens localement compacts :

Définition 2.2. Soient $A, B$ une paire de groupes abéliens localement compacts avec pour mesures de Haar $da, db$. Soit $\alpha(a, b)$ un bicaractère qui donne un isomorphisme $B \sim \widehat{A}$ de $B$ avec le dual de Pontrjagin de $A$. Alors la transformée de Fourier $\mathbf{F}_\alpha$ est définie par

(2.55) $$\mathbf{F}_\alpha(f)(b) := \int \alpha(a, b)f(a)da$$

Le cutoff ultraviolet est donné par la projection orthogonale $\widehat{P}_\Lambda$ donnée par le conjugué

(2.56) $$\widehat{P}_\Lambda = \mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}\, P_\Lambda\, \mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}^{-1}.$$

Ici $\mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}$ est la transformée de Fourier associée au bicaractère $e_\mathbb{R}$ introduit ci-dessus dans (2.37) (voir Annexe 1).

La première difficulté que l'on rencontre, inhérente au système quantique, est le fait que les deux cutoffs $P_\Lambda$ et $\widehat{P}_\Lambda$ ne commutent pas, donc on ne peut pas juste intersecter leurs domaines afin d'effectuer les deux cutoffs à la fois. En effet, aucune fonction non nulle sur $\mathbb{R}$ ne peut avoir la propriété qu'à la fois la fonction et sa transformée de Fourier sont toutes les deux à support compact.

La position relative des deux projections (2.54) et (2.56) a d'abord été analysée dans les travaux de Slepian, Landau, Pollak, motivés par des problèmes de génie électrique ([196, 197, 245]), au début des années soixante.

Le résultat a été depuis considérablement affiné. Pour expliquer le point principal, rappelons d'abord au lecteur des faits bien connus sur la géométrie des couples de projections.

Lemme 2.3. Donner une paire de projections orthogonales $P_i, i = 1, 2$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ revient à donner une représentation unitaire du groupe diédral $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le produit libre de deux copies du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ces représentations unitaires irréductibles sont paramétrées par un angle $\alpha \in [0, \pi/2]$.

Ce que Slepian, Pollack et Landau ([196, 197, 245]) ont fait consiste à analyser la position relative des projections $P_\Lambda$ et $\widehat{P}_\Lambda$ pour $\Lambda \to \infty$. Dans des problèmes concrets de génie électrique, cela permet de prendre en compte des signaux qui, à toutes fins utiles, sont de support fini à la fois selon la variable de temps et selon la variable duale de fréquence. Cela avait un rôle important dans les premiers développements de la technologie laser.

L'idée de base utilisée dans les articles de Pollack, Slepian, Landau ([196, 197, 245]) est qu'il existe un opérateur différentiel de second ordre $\mathbf{W}_\Lambda$ sur $\mathbb{R}$, qui commute à la fois avec $P_\Lambda$ et avec $\widehat{P}_\Lambda$. Cet opérateur est de la forme

$$(\mathbf{W}_\Lambda \psi)(q) \;=\; -\partial((\Lambda^2 - q^2)\partial)\psi(q) + (2\pi\Lambda q)^2\psi(q). \tag{2.60}$$

Ici le symbole $\partial$ désigne la différenciation ordinaire en une variable. Pour être plus précis, (2.60) définit un opérateur symétrique de domaine naturel l'espace de Schwartz. Rappelons que par définition les indices de déficience $n_\pm(T)$ d'un opérateur symétrique $T$ sont les dimensions de $\ker(T^* \pm i)$. On peut montrer que l'opérateur $\mathbf{W}_\Lambda$ a ses deux indices de déficience qui sont égaux à 4 et qu'il admet une unique extension auto-adjointe qui commute avec le groupe diédral $\Gamma$ associé aux projections $P_\Lambda$ et $\widehat{P}_\Lambda$. Nous utilisons la même notation $\mathbf{W}_\Lambda$ pour désigner cet opérateur auto-adjoint. Il commute avec la transformée de Fourier $\mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}$.

Si l'on astreint la variable à appartenir au domaine $[-\Lambda, \Lambda]$, l'opérateur $\mathbf{W}_\Lambda$ a un spectre discret simple. Ses propriétés ont été étudiées il y a longtemps. Il apparaît dans la factorisation de l'équation de Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi \;=\; 0 \tag{2.61}$$

dans l'un des systèmes de coordonnées peu séparables dans l'espace euclidien de dimension 3, appelé *système de coordonnées sphéroïdales prolates*. Les valeurs propres $\chi_n(\Lambda), n \geq 0$ de $\mathbf{W}_\Lambda$, listées en ordre croissant $\chi_{n+1} > \chi_n$, sont simples et positives. Les fonctions propres correspondantes $\psi_n$ sont appelées fonctions d'ondes sphéroïdales prolates. Puisque le produit $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ commute avec $\mathbf{W}_\Lambda$, ce sont des fonctions propres de $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$. Par les résultats de Pollack, Landau, Slepian ([196, 197, 245]) , les valeurs propres $\lambda_n$ de l'opérateur $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ sont simples. De plus, si on les liste dans l'ordre décroissant $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_n > \ldots$, on a

$$P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda \psi_n = \lambda_n \psi_n. \tag{2.62}$$

Ainsi, les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates $\psi_n$ sont les vecteurs propres de $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ associés à des valeurs propres non nulles.

On en sait beaucoup sur les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates $\psi_n$. En particulier, on peut les considérer comme étant à valeurs réelles. Elles sont paires pour $n$ pair et impaires pour $n$ impair, et elles ont exactement $n$ zéros dans l'intervalle $[-\Lambda, \Lambda]$. Nous les normalisons pour qu'elles aient leur $L^2$-norme égale à 1. Nous ne nous intéressons qu'aux $\psi_n$ pour des valeurs paires de $n$, puisque dans notre espace mécanique quantique de Hilbert, on se restreint aux fonctions paires. Lorsque $\Lambda \to \infty$, la fonction $\psi_n$ converge vers la fonction d'Hermite-Weber $\Omega_n$ d'ordre $n$.

Les valeurs propres $\lambda_n$ se comportent qualitativement de la manière suivante, comme fonctions du cutoff. Elles restent très proches de la valeur $\lambda_n \sim 1$, jusqu'à ce que $n$ tombe dans un intervalle $I$ de taille $\sim \log \Lambda$ autour de la valeur $4\,\Lambda^2$. Leur comportement dans cet intervalle est régi par la relation

$$\lambda_n = (1 + e^{\pi\delta})^{-1} \tag{2.63}$$

où $\delta$ est la solution de plus petite valeur absolue de l'équation

$$(n + 1/2)\pi = 4\pi\Lambda^2 + \delta\,\log(8\pi\Lambda^2) - \delta(\log(|\delta/2|) - 1). \tag{2.64}$$

Au-delà de l'intervalle $I$, les valeurs propres $\lambda_n$ tendent très rapidement vers zéro.

Pour la paire de projections $P_\Lambda$ et $\widehat{P}_\Lambda$, on obtient de cette façon les valeurs propres $\alpha_n$ de l'opérateur angle $\alpha$ du lemme 2.3 par (2.59), c'est-à-dire

$$\cos^2(\alpha_n) = \lambda_n. \tag{2.65}$$

Ceci montre que l'angle $\alpha_n$ est essentiellement 0 sauf sur[1] un intervalle $I$ de taille $\sim$ log$\Lambda$ autour de la valeur $n \sim 4\Lambda^2$. Il passe alors de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et reste sensiblement égal à $\frac{\pi}{2}$ pour toutes les plus grandes valeurs de $n$. Cela montre clairement comment imposer à la fois le cutoff ultraviolet et le cutoff infrarouge en se restreignant au sous-espace $B_\Lambda$ de $\mathcal{H}$ couvert par les $\psi_{2n}$, pour $2n \le 4\Lambda^2$. Aucune attention particulière n'est nécessaire pour définir précisément la borne supérieure, puisqu'on peut montrer que, pour tout $n$ dans l'intervalle $I$ considéré ci-dessus et pour tout $h \in \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on a

$$\|\vartheta_{\mathrm{a}}(h)\psi_n\| \;=\; O(\Lambda^{-\rho}) \tag{2.66}$$

pour quelques $\rho > 0$, et avec $\vartheta_{\mathrm{a}}(h)$ comme en (2.53). On note $Q_\Lambda$ la projection orthogonale sur $B_\Lambda \subset \mathcal{H}$.

Nous arrivons maintenant au problème de compter le nombre d'états du système quantique statistique qui ont une énergie bornée $|H| \le E$ sur l'hamiltonien $H$ (c'est-à-dire le générateur des transformations d'échelle). L'hamiltonien $H$ est le générateur de l'action de mise à l'échelle de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathcal{H}$ et on identifie, comme précédemment, le groupe dual de $\mathbb{R}_+^*$ avec $\mathbb{R}$ en utilisant le bicaractère défini dans (2.47) (voir Annexe 2).

Lemme 2.4. Soit $N_E$ la projection spectrale, de l'action de mise à l'échelle de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathcal{H}$, associé à l'intervalle $[-E, E]$ dans le groupe dual $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}_+^*$. Il est donné par

$$N_E \;=\; \vartheta_{\mathrm{a}}(h_E), \qquad \text{avec} \qquad h_E(u) = |u|^{-1/2}\frac{1}{2\pi}\int_{-E}^{E} |u|^{is} ds, \tag{2.67}$$

avec $\vartheta_{\mathrm{a}}(h_E)$ défini en (2.53).

Nous pouvons maintenant formuler le problème du comptage des états quantiques du flot de mise à l'échelle de la manière suivante.

Remarque 2.5. Compter le nombre d'états quantiques de l'hamiltonien $H$ assujetti à la contrainte $|H| \le E$ revient à calculer la dimension de la presque-intersection des projections $Q_\Lambda$ et $N_E$. Ceci est donné par $\mathrm{Tr}(Q_\Lambda N_E)$.

Pour calculer $\mathrm{Tr}(Q_\Lambda N_E)$ pour $\Lambda$ grand, on peut utiliser l'analyse de l'opérateur d'angle entre $P_\Lambda$ et $\widehat{P}_\Lambda$ décrit ci-dessus avec (2.66) et remplacer $Q_\Lambda$ par

$$R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda, \tag{2.68}$$

[1] up to se traduit par sauf sur ?

ce qui introduit un terme d'erreur de l'ordre de $O(\Lambda^{-\rho}\log\Lambda)$. Par conséquent, pour compter le nombre d'états quantiques dans la presque-intersection des deux projections $Q_\Lambda$ et $N_E$, on a juste besoin de calculer

$$\operatorname{Tr}(Q_\Lambda N_E) \sim \operatorname{Tr}(R_\Lambda \vartheta_{\mathrm{a}}(h_E)). \tag{2.69}$$

Il reste ainsi à calculer $\operatorname{Tr}(R_\Lambda \vartheta_{\mathrm{a}}(h_E))$. Nous appliquons alors le théorème 3 de [71], qui est en fait valide pour tout corps local et qui est un cas particulier du théorème 2.36 [2]

$$\int'_{(K,\alpha)} \frac{f(u^{-1})}{|1-u|} d^*u \;=\; \langle \varrho_\alpha, g\rangle, \qquad \text{avec} \quad g(\lambda) = \frac{f((\lambda+1)^{-1})}{|\lambda+1|}, \tag{2.102}$$

où $\langle \varrho_\alpha, g\rangle$ est l'appariement de la distribution $\varrho$ et de la fonction $g(\lambda)$.

Théorème 2.6. Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$ une fonction à support compact, et soit $\vartheta_{\mathrm{a}}(h)$ donnée par (2.53). Alors $R_\Lambda \vartheta_{\mathrm{a}}(h)$ est un opérateur de classe trace. De plus, pour $\Lambda \to \infty$, on a

$$\operatorname{Tr}(R_\Lambda \vartheta_{\mathrm{a}}(h)) \;=\; 2h(1)\log\Lambda + \int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1). \tag{2.70}$$

Nous voulons appliquer cette formule à la fonction $h = h_E$ de (2.67). Noter que cette fonction n'a pas un support compact, donc en principe, le résultat ne s'applique pas directement. Nous ferons attention à ce point technique au § 5.1 ci-dessous. Dans (2.70), l'intégrale est singulière en $u = 1$ et le théorème 2.6 sélectionne une valeur principale particulière dénotée par $\int'$, dont nous discuterons en détail au § 4 ci-dessous.

### Annexe 1: Référence au bicaractère défini dans (2.37)

Plus précisément, considérons le produit $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$ du groupe additif $\mathbb{R}$ par son groupe dual $\widehat{\mathbb{R}}$ et utilisons le bicaractère

$$e_{\mathbb{R}}(p,q) \;=\; \exp(-2\pi i p q) \tag{2.37}$$

pour identifier $\widehat{\mathbb{R}}$ avec $\mathbb{R}$. Dans cette notation, $\frac{\partial}{\partial q}$ correspond à $-2\pi i p$ et le générateur $iq\frac{\partial}{\partial q}$ des transformations de mise à l'échelle correspond à $2\pi q p$. Ainsi, l'hamiltonien $h(q,p)$ est de la forme

$$h(q,p) = 2\pi q p. \tag{2.38}$$

La forme symplectique canonique

$$\omega = dp \wedge dq \tag{2.39}$$

est le produit de la mesure de Haar sur $\mathbb{R}$ par la mesure de Haar duale sur $\widehat{\mathbb{R}}$.

Dénotons par $X$ le quotient de $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$ par la symétrie discrète $(p,q) \mapsto (-p,-q)$.

L'hamiltonien $h(q,p)$ n'est pas positif, mais cela est en accord avec la symétrie $\frac{1}{2} + iE \mapsto \frac{1}{2} - iE$sur les zéros de $\zeta$. Cette symétrie montre que nous devrions comparer

$$2N(E) = \#\{\rho \mid \zeta^*(\rho) = 0, |\Im\rho| \le E\} \tag{2.40}$$

avec le volume symplectique de $|h| \le E$, i.e. avec le volume symplectique de la région satisfaisant

$$|qp| \le \frac{E}{2\pi}$$

[2] Théorème 2.36. Soit $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},S}$ comme précédemment, avec comme caractère de base $\alpha = \prod_{v\in S}\alpha_v$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_{\mathbb{Q},S})$ une fonction de support compact. Alors, dans la limite $\Lambda \to \infty$, on a

$$\operatorname{Tr}(\vartheta_{\mathrm{a}}(h)\, R_\Lambda) \;=\; 2h(1)\log\Lambda + \sum_{v\in S}\int'_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1). \tag{2.271}$$

**Annexe 2 : Référence au bicaractère défini dans (2.47)**

Maintenant $2 \times \frac{E}{2\pi} \times 2\,\log\Lambda$ est la forme symplectique de la région du cutoff

$$W(E,\Lambda) = \{(\lambda,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid \lambda \in [\Lambda^{-1},\Lambda], \quad |\theta| \le E\} \tag{2.46}$$

dans le produit du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ par son groupe dual $\widehat{\mathbb{R}_+^*} \simeq \mathbb{R}$. Ici nous identifions $\widehat{\mathbb{R}_+^*}$ avec $\mathbb{R}$ en utilisant le caractère

$$\langle \lambda, \theta \rangle \ = \ \lambda^{i\theta}. \tag{2.47}$$

En fait, le produit de la mesure de Haar sur $\mathbb{R}_+^*$, par la mesure duale de Haar sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\lambda}{\lambda} \ \times \ d\theta. \tag{2.48}$$

**Références**


[71] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), n°1, 29 – 106.

[196] H.J. Landau, H. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty II*, Bell Syst. Tech. J. Vol. 40 (1961).

[197] H.J. Landau, H. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty III*, Bell Syst. Tech. J. Vol. 41 (1962).

[245] H. Pollak, D. Slepian, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty*, Bell Syst. Tech. Journal, Vol. 40 (1961), 43-64.