Conjecture de Goldbach et logique propositionnelle
(propositions à une variable)

Denise Vella-Chemla
janvier 2023

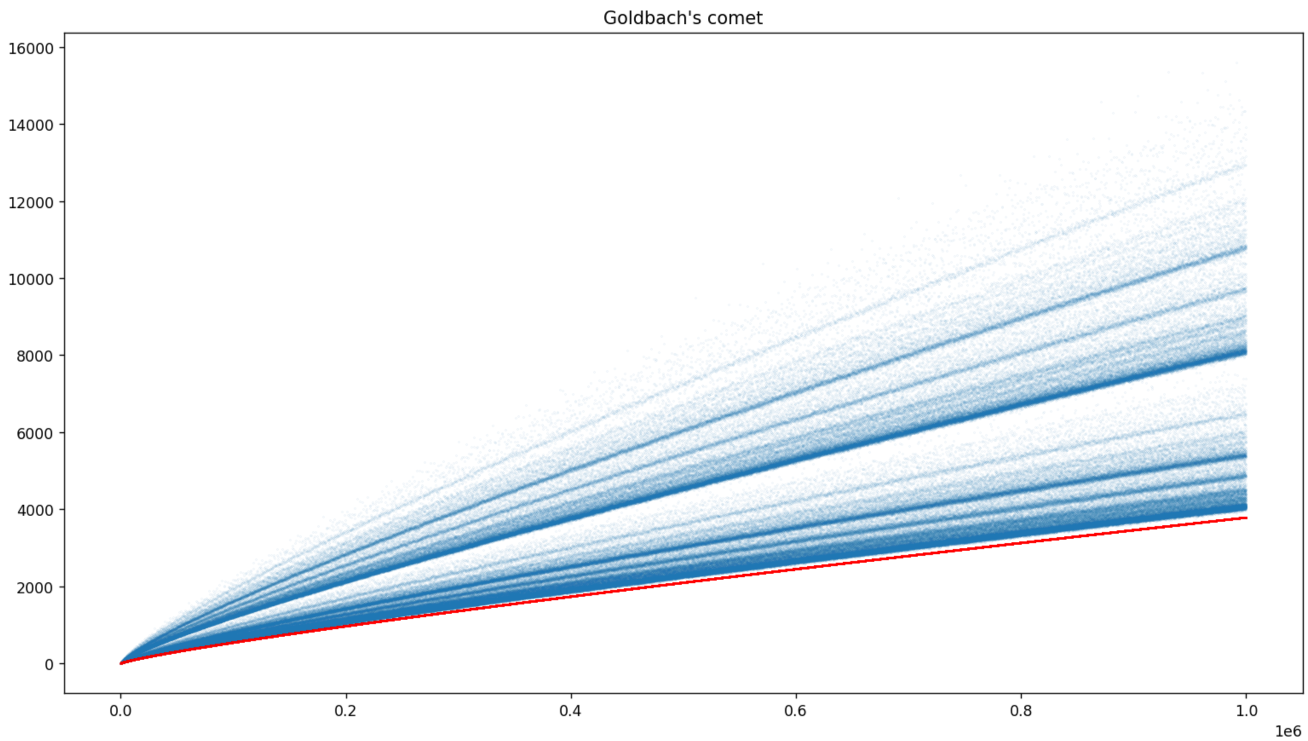
On se situe dans la logique propositionnelle des propositions à une variable. On a des énoncés vrais et des énoncés faux. Si la variable z représente l'énoncé '3+9=10', elle prend la valeur de vérité $faux$. Si la variable z représente l'énoncé '3+35=38', elle prend la valeur de vérité $vrai$. On va dans la suite ne s'intéresser qu'aux énoncés qui sont vrais, de la forme $n = p + q$ avec n un nombre pair, et p et q deux nombres impairs.

Parmi ces énoncés, un certain nombre font intervenir deux nombres premiers en place de p et q. Représentons ces énoncés sur la Figure 1. On a sur la figure ordonné les énoncés dans le plan pour fixer les idées, mais on peut tout à fait les imaginer "en vrac".

6= $3+3$	6= $5+1$	6= $7+(-1)$	6= $9+(-3)$	6= $11+(-5)$	6= $13+(-7)$	6= $15+(-9)$	6= $17+(-11)$
8= $3+5$	8= $5+3$	8= $7+1$	8= $9+(-1)$	8= $11+(-3)$	8= $13+(-5)$	8= $15+(-7)$	8= $17+(-9)$
10= $3+7$	10= $5+5$	10= $7+3$	10= $9+1$	10= $11+(-1)$	10= $13+(-3)$	10= $15+(-5)$	10= $17+(-7)$
12= $3+9$	12= $5+7$	12= $7+5$	12= $9+3$	12= $11+1$	12= $13+(-1)$	12= $15+(-3)$	12= $17+(-5)$
14= $3+11$	14= $5+9$	14= $7+7$	14= $9+5$	14= $11+3$	14= $13+1$	14= $15+(-1)$	14= $17+(-3)$
16= $3+13$	16= $5+11$	16= $7+9$	16= $9+7$	16= $11+5$	16= $13+3$	16= $15+1$	16= $17+(-1)$
18= $3+15$	18= $5+13$	18= $7+11$	18= $9+9$	18= $11+7$	18= $13+5$	18= $15+3$	18= $17+1$
20= $3+17$	20= $5+15$	20= $7+13$	20= $9+11$	20= $11+9$	20= $13+7$	20= $15+5$	20= $17+3$
22= $3+19$	22= $5+17$	22= $7+15$	22= $9+13$	22= $11+11$	22= $13+9$	22= $15+7$	22= $17+5$
24= $3+21$	24= $5+19$	24= $7+17$	24= $9+15$	24= $11+13$	24= $13+11$	24= $15+9$	24= $17+7$

FIGURE 1 : les énoncés vrais de la forme $pair = impair + impair$

Intéressons-nous maintenant à la conjecture de Goldbach. Quand on représente la comète des décompositions, que représentent les points de la comète ? (admettons qu'ils soient positionnés eux-aussi aux points entiers d'un maillage $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).



Un point (x, y) bleu de la comète représente qu'on a y énoncés vrais de la forme '$x = p + q$' avec x pair, p et q deux nombres premiers (et $p \leqslant q$ en l'occurrence). Par exemple, pour le nombre 98, qui a 3 décompositions de Goldbach 19+79, 31+67 et 37+61, le point de la comète $(98, 3)$ représente le fait que parmi les multiples possibilités d'énoncés en logique propositionnelle représentant les décompositions de 98 en une somme de deux impairs, 3 seulement font intervenir deux nombres premiers.

Il faut avoir à l'esprit que le point $(98, 3)$ représente les décompositions de Goldbach de 98 parmi une multitude d'autres points de la verticale $x = 98$, sur laquelle on pourrait positionner une multitude d'autres points qui pourraient signifier par exemple '98 a 10 décompositions de Goldbach', voire '98 a $\sqrt{2}$ décompositions de Goldbach' (si l'on se place dans $\mathbb{R}^2$ plutôt que dans $\mathbb{N}^2$).

L'article [1] fournit une limite asymptotique à la proportion des tautologies à une variable parmi les propositions à une variable. Une reformulation d'un extrait du résumé de cet article est :

> "*On démontre que la limite de la densité (ou bien la probabilité asymptotique) des formules propositionnelles intuitionnistes prouvables parmi l'ensemble de toutes les formules existe et qu'elle est égale, pour les types avec un type de base (les formules avec une seule variable propositionnelle), à $1/2 + \sqrt{5}/10$, qui est approximativement égal à 72%. Cela signifie qu'un type aléatoire (en terme de formule) d'une grande taille a environ 72% de chance d'être une tautologie.*"

Ce ratio est égal à $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}=0.72360679775=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, le nombre d'or divisé par $\sqrt{5}$.

Si l'on se dit que les points de la comète représentent un certain nombre de tautologies parmi de multiples propositions possibles, le ratio en question devrait minorer la comète.

C'est ce qui est montré par la courbe rouge, sous la comète, qui est le graphique de la fonction $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\,\dfrac{x}{\ln x\cdot\ln x}$.

On a un problème par rapport à l'interprétation des termes du résumé "*un type aléatoire (en terme de formule)* d'une grande taille" : tous nos énoncés de la forme $pair = impair + impair$ sont de la même taille (on n'a pas d'énoncés faisant intervenir de multiples implications, dussent-elles porter sur une et une seule variable). On pourrait considérer que l'énoncé '100=3+97' est d'une plus grande taille que l'énoncé '6=3+3' parce que, calculatoirement parlant, le calcul est plus long à effectuer (démontrer par ordinateur que 97 est premier nécessite plus de temps que démontrer que 3 l'est) mais on pensait plutôt qu'on devait se situer là dans une sorte de monde idéal, où tous les énoncés de la forme 'tel nombre est premier' sont donnés "d'un coup". On a donc du mal à savoir si (et via) quelle transposition logique de la conjecture de Goldbach dans la logique propositionnelle des énoncés à une seule variable le résultat de [1] est applicable.

Cependant, si l'interprétation de la comète et la transposition qu'on a proposée étaient valides, on aurait établi un joli "pont", au sens d'Olivia Caramello, entre l'arithmétique et la logique propositionnelle à une variable.

Note : on a déposé dans un fichier tableur de 25 méga les nombres de décompositions de Goldbach des nombres pairs de 6 à 10^6 ainsi que la valeur de la fonction minorante rouge, à l'adresse http://denise.vella.chemla.free.fr/dg-calc-1000000-dvc.pdf[1].

Références

[1] Malgorzata Moczurad, Jerzy Tyszkiewicz, Marek Zaionc, *Statistical properties of simple types.* Math. Struct. Comput. Sci. 10(5): 575-594 (2000).
Traduction en français : http://denise.vella.chemla.free.fr/trad-Prop-stat-tautologies.pdf.
Article original au format pdf (le fichier au format postscript est téléchargeable sur la page de M. Zaionk).
http://denise.vella.chemla.free.fr/Statistical$_{P}roperties_{o}f_{S}imple_{T}ypes.pdf$.

[2] Olivia Caramello, *Theories, Sites, Toposes: Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'*, Oxford University Press, 2017.

[1] Il y a 32 exceptions à la minoration pour les pairs inférieurs à 10^6. Ces exceptions concernent les nombres : $6=2\cdot3, 8=2^3, 12=2^2\cdot3, 38=2\cdot19, 68=2^2\cdot17, 98=2\cdot7^2, 128=2^7, 152=2^3\cdot19, 326=2\cdot163, 332=2^2\cdot183, 398=2\cdot199, 488=2^3\cdot61, 632=2^3\cdot79, 668=2^2\cdot167, 692=2^2\cdot173, 992=2^5\cdot31, 1112=2^3\cdot139, 1412=2^2\cdot353, 1718=2\cdot859, 2048=2^{11}, 2252=2^2\cdot563, 2642=2\cdot1321, 2672=2^4\cdot167, 2936=2^3\cdot367, 4412=2^2\cdot1103, 5468=2^2\cdot1367, 5948=2^2\cdot1487, 7508=2^2\cdot1877, 8042=2\cdot4021, 8048=2^4\cdot503, 8552=2^3\cdot1069, 9602=2\cdot4801$.