Traduction en français de deux extraits du livre d'Alain Connes *Non commutative geometry*, puis traduction des articles présentés par Alain Connes au Congrès des mathématiciens de Vancouver (1974) et Helsinki (1978), Denise Vella-Chemla, mai 2025. [1]

3. Calcul quantifié en une variable et ensembles fractals [p. 320 et suivantes]

La théorie des distributions s'applique bien à un certain nombre de problèmes dans lesquels interviennent des fonctions non lisses, comme celles engendrées par le calcul variationnel. Elle est pourtant, de façon notoire, incompatible avec les *produits*, i.e. les produits de distributions ont seulement du sens dans de rares cas. La raison à cela est simple, puisque la notion de distribution sur une variété V est invariante sous toute transformation *linéaire* continue de $C^\infty(V)$ alors que de telles transformations linéaires affectent arbitrairement la structure d'*algèbre* de $C^\infty(V)$. Dans le calcul quantifié que l'on propose, la différentielle d'une fonction f est un *opérateur* dans l'espace de Hilbert, notamment

$$df = [F, f].$$

En particulier, cet opérateur peut subir toutes les opérations du calcul fonctionnel comme, par exemple,

$$T \to |T|^p$$

où $|T|$ est la valeur absolue de l'opérateur T et p est un nombre réel positif qui n'est pas un entier.

Cela donne du sens à n'importe quelle expression, telle que "$|df|^p$ est pair" quand f n'est pas une fonction différentielle. On montrera la puissance de cette méthode en donnant la formule de la mesure de Hausdorff Λ_p pour les fractals qui apparaissent en théorie de l'uniformisation de paires de surfaces de Riemann de même genre :

$$\int f d\Lambda_p = \mathrm{Tr}_\omega(f(Z)\,|dZ|^p),$$

pour toute fonction continue f sur C, et avec $Z\ : \mathbb{S}^1 \to C$ la valeur aux bornes d'une équivalence conforme.

3.α Calcul quantifié en une variable. Quantifions d'abord le calcul en une variable réelle, d'une façon invariante par translation et par transformation d'échelle.

Notre algèbre $\mathcal{A}$ est l'algèbre des fonctions $f(s)$ d'une variable réelle $s \in \mathbb{R}$; on ne spécifie pas leur régularité pour l'instant. Pour quantifier le calcul, on a besoin d'un module de Fredholm sur $\mathcal{A}$, i.e. on a besoin d'une représentation de $\mathcal{A}$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'un opérateur F comme dans la définition 0.1. La représentation de $\mathcal{A}$ est donnée par une classe de mesure sur $\mathbb{R}$ et par une fonction de multiplicité. Puisqu'on veut que le calcul soit invariant par translation, la classe de

[1]Lien de téléchargement du livre d'Alain Connes :
https://alainconnes.org/wp-content/uploads/book94bigpdf.pdf
et page des proceedings des congrès des mathématiciens :
https://www.mathunion.org/icm/proceedings.

mesure est nécessairement la classe de Lebesgue et la multiplicité est une constante. On la prend égale à 1 ; le cas le plus général n'amène rien de nouveau. Donc, jusque-là, on a des fonctions sur $\mathbb{R}$ agissant par des opérateurs de multiplication sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}), (f\xi)(s) = f(s)\xi(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \xi^2(\mathbb{R}). \tag{4.12}$$

Toute fonction bornée mesurable $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ définit un opérateur borné dans $\mathcal{H}$ par l'égalité (1).

Puisqu'on veut que le calcul soit invariant par translation, l'opérateur F doit commuter avec les translations, et par conséquent, il doit être donné par un opérateur de convolution. On a aussi besoin qu'il commute avec les dilatations, $s \to \lambda s$ avec $\lambda > 0$ et il en découle facilement (cf., par exemple, [532]) que le seul choix non trivial qu'on ait pour F, avec $F^2 = 1$, est la transformation de Hilbert, donnée par

$$(F\xi)(s) = \frac{1}{\pi\, i} \int \frac{\xi(t)}{s-t} dt \tag{4.13}$$

où l'intégrale est prise pour $|s-t| > \varepsilon$ et alors, on pose $\varepsilon \to 0$.

La différentielle quantique $df = [F, f]$ de $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ a une expression très simple ; c'est l'opérateur sur $L^2(\mathbb{R})$ associé par l'égalité

$$T\xi(s) = \int k(s,t)\xi(t)dt \tag{4.14}$$

au noyau suivant $k(s,t)$ défini pour $s, t \in \mathbb{R}$

$$k(s,t) = \frac{f(s) - f(t)}{s-t} \tag{4.15}$$

(au facteur $\dfrac{1}{\pi\, i}$ près, qu'on ignore).

Notons que le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agit par les automorphismes du module de Fredholm $(\mathcal{H}, F)$, en généralisant l'invariance ci-dessus par les translations et les homothéties. En effet, étant donné $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (de telle façon que $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$), on fait agir g^{-1} sur $L^2(\mathbb{R})$ comme l'opérateur unitaire pour lequel

$$(g^{-1}\xi)(s) = \xi\left(\frac{as+b}{cs+d}\right)(cs+d)^{-1} \qquad \forall \xi \in L^2(\mathbb{R}), s \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

On vérifie que cette représentation de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ commute avec F. Ses restrictions à $\{\xi; F\xi = \pm\xi\}$ sont les deux séries discrètes de mock. Les automorphismes correspondant de l'algèbre des fonctions sur $\mathbb{R}$ sont donnés par

$$(g^{-1}f)(s) = f\left(\frac{as+b}{cs+d}\right) \qquad\qquad \forall f \in L^\infty(\mathbb{R}), s \in \mathbb{R}. \tag{4.17}$$

En utilisant une transformation linéaire arbitraire fractionnaire de la droite réelle $\mathbb{R}$ vers le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, telle que

$$s \in \mathbb{R} \to \frac{s-i}{s+i} \in \mathbb{S}^1 \tag{4.18}$$

on peut transporter le module de Fredholm ci-dessus vers des fonctions sur le cercle $\mathbb{S}^1$. Cela se décrit comme suit :

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{S}^1, d\theta)$ avec les fonctions sur $\mathbb{S}^1$ agissant par multiplication (comme dans (1))
$F = 2P - 1$ où P est la projection orthogonale sur

$$H^2(\mathbb{S}^1) = \{\xi \in L^2 \,; \widehat{\xi}(n) = 0 \quad \forall n < 0\} \tag{4.19}$$

où $\widehat{\xi}$ est la transformation de Fourier de ξ.

Les deux situations, avec $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1$, sont unitairement équivalentes si l'on suppose que l'on prend dans les deux cas les algèbres de von Neumann de toutes les fonctions mesurables bornées. On gardera les deux. Notre première tâche qui est facile consistera à citer un certain nombre de résultats bien connus de l'analyse (cf. [532] [457] [437] [438] [439] [440]) nous permettant de contrôler l'ordre de $df = [F, f]$ en fonction de la régularité de la fonction $f \in L^\infty$.

La condition *la plus forte* que l'on peut imposer à df est d'appartenir au plus petit idéal non trivial d'opérateurs, notamment l'idéal R des opérateurs de rang fini. La condition nécessaire et suffisante pour que cette condition soit respectée est un résultat de Kronecker (cf. [457]):

Proposition 1. *Soit $f \in L^\infty$, alors $df \in R \iff f$ est une fraction rationnelle.*

Ce résultat est vérifié à la fois pour $\mathbb{R}$ et pour $\mathbb{S}^1$; dans les deux cas, la fraction rationnelle $\frac{P(s)}{Q(s)}$ est égale a.e. à f et n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{S}^1$).

La condition *la plus faible* que l'on peut imposer à df est d'être un opérateur compact. En fait, on devrait se restreindre à la sous-algèbre de L^∞ déterminée par cette condition si l'on souhaite se conformer à la condition 2 de la définition 0.1.

Ce que cela signifie est connu (cf. [457]) et aisé à formuler pour $\mathbb{S}^1$. Cela fait intervenir l'*oscillation moyenne* de la fonction f. Rappelons que, étant donné n'importe quel intervalle I de $\mathbb{S}^1$, appelons $I(f)$ la moyenne $\frac{1}{|I|}\int_I f\,dx$ de f sur I et définissons pour $a > 0$ l'oscillation moyenne de f par

$$M_a(f) = \sup_{|I| \leq a} \frac{1}{|I|}\int_I |f - I(f)|.$$

Une fonction est dite avoir une oscillation moyenne bornée (BMO) si les $M_a(f)$ sont bornés indépendamment de a. C'est, bien sûr, vrai si $f \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$. Une fonction f est dite avoir une oscillation moyenne *s'évanouissant* (VMO) si $M_a(f) \to 0$ lorsque $a \to 0$. Fournissons alors un résultat de Fefferman et Sarason (cf. [457]).

Proposition 2. *Si* $f \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$*, alors* $[F,f] \in \mathcal{K} \iff f \in \mathrm{VMO}$.

Toute fonction continue $f \in C(\mathbb{S}^1)$ est VMO mais l'algèbre $\mathrm{VMO} \cap L^\infty$ est strictement plus grande que $C(\mathbb{S}^1)$. On appelle ses éléments des fonctions quasi-continues. Par exemple, les valeurs aux frontières de toute fonction bornée holomorphe univalente $f \in H^\infty(\mathbb{S}^1)$ appartiennent à VMO mais non nécessairement à $C(\mathbb{S}^1)$.

La question suivante est de savoir comment caractériser les fonctions $f \in L^\infty$ pour lesquelles

$$[F,f] \in \mathcal{L}^p$$

pour un nombre réel donné $p \in [1,\infty[$.

Cette question a une réponse remarquablement jolie, due à V.V. Peller [437], en fonction des espaces de Besov $B_p^{1/p}$ des fonctions mesurables.

Définition 3. *Soit* $p \in [1,\infty[$*. Alors l'espace de Besov* $B_p^{1/p}$ *est l'espace des fonctions mesurables* f *sur* $\mathbb{S}^1$ *tel que*

$$\int\int |f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)|^p \, t^{-2} \, dx \, dt < \infty$$

Pour $p > 1$, cette condition est équivalente à

$$\int\int |f(x+t) - f(x)|^p t^{-2} dx dt < \infty$$

et les normes correspondantes sont équivalentes. Pour $p = 2$, on retrouve l'espace de Sobolev des séries de Fourier,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi i n t), \quad \sum |n| \, |a_n|^2 < \infty.$$

Le résultat de V.V. Peller est alors le suivant :

Théorème 4. [437] *Soit* $f \in L^\infty(\mathbb{S}^1), p \in [1,\infty[$ *; alors* $[F,f] \in \mathcal{L}^p \iff f \in B_p^{1/p}$.

Il y a un résultat similaire pour $p < 1$ dû indépendamment à Semmes et à Peller.

Pour $f \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$, l'opérateur $df = [F,f]$ anti-commute avec F par construction, et il est par conséquent donné par une matrice non diagonale 2×2 dans la décomposition de $L^2(\mathbb{S}^1)$ comme somme directe d'espaces propres de F. Cette matrice 2×2 est triangulaire inférieure, i.e. $(1-P)fP = 0$ avec $P = \dfrac{1+F}{2}$ si $f \in H^\infty(\mathbb{S}^1)$, i.e. f est la valeur aux bornes d'une fonction holomorphe dans le disque.

$$\text{Si } f \in L^\infty(\mathbb{S}^1), \text{ alors } f \in H^\infty(\mathbb{S}^1) \iff (1-P)fP = 0. \tag{4.20}$$

En particulier, $df_1 \, df_2 = 0$ pour tout $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{S}^1)$.

On terminera cette section en donnant les reformulations connues des espaces de $A_p^{1/p} = \{f \in B_p^{1/p}\ \widehat{f}(n) = 0 \text{ pour } n < 0\}$. Étant donnée $f \in A_p^{1/p}$, on dénote également par f la fonction holomorphe à l'intérieur du disque unité D avec f comme valeurs aux bornes.

Proposition 5. [532]

a) Pour $1 \leq p < \infty$, on a $f \in A_p^{1/p}$ ssi

$$\int_D |f''|^p (1-|z|)^{2p-2}\, dz\, d\overline{z} < \infty.$$

b) Pour $1 < p < \infty$, on a $f \in A_p^{1/p}$ ssi

$$\int_D |f'|^p (1-|z|)^{p-2} dz d\overline{z} < \infty.$$

On peut également reformuler la condition $f \in A_p^{1/p}$ en utilisant la L^p norme de la troncature de la série de Fourier de f, $\sum \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$, entre $k = 2^n$ et $k = 2^{n+1}$. Plus précisément ([457]), on désigne par w_n, pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n$, le polynôme trigonométrique

$$w_n = \sum_{2^{n-1}}^{2^{n+1}} c_k e^{ik\theta}$$

où $c_k = (k - 2^{n-1})/2^{n-1}$ pour $2^{n-1)} \leq k \leq 2^n$ et $c_k = (2^{n+1} - k)/2^n$ pour $2^n \leq k \leq 2^{n+1}$. Alors l'opérateur $f \mapsto f * w_n$ de convolution par w_n est le même que la multiplication des coefficients de Fourier $\widehat{f}(k)$ par c_k. Ces opérateurs s'ajoutent pour obtenir l'identité, et on a :

Proposition 6. *L'espace $A_p^{1/p}$ est l'espace des valeurs aux frontières des fonctions holomorphes à l'intérieur de D telles que*

$$\sum 2^n \, \|w_n * f\|_p^p < \infty.$$

En utilisant $w_{-n} = \overline{w}_n$ pour $n < 0$, on peut alors vérifier que les conditions suivantes sur $f \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ sont équivalentes, pour tout $p \in [1, \infty[$:

$$[F, f] \in \mathcal{L}^p, \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{|n|} \, \|wn * f\|_p^p < \infty.$$

3.β La classe de *df* dans $\mathcal{L}^{p,\infty}/\mathcal{L}_0^{p,\infty}$. La quantité $\int_D |f'|^p (1-|z|)^{p-2} dz d\overline{z}$ de la Proposition 5b) peut facilement être contrôlée quand la fonction f est *univalente* dans le disque, en fonction du domaine $\Omega = f(\text{Disque})$. En effet, par le théorème $\frac{1}{4}$ de Koebe (cf. [486]) on a, pour f univalente

$$\frac{1}{4}(1-|z|^2)|f'(z)| \leq \operatorname{dist}(f(z), \partial\Omega) \leq (1-|z|^2)\, |f'(z)|. \tag{4.21}$$

Il est alors évident d'estimer la taille de la différentielle quantique $df = [F, f]$ d'une application univalente f en fonction de la géométrie du domaine $f(\text{Disque}) = \Omega$.

Proposition 7. **[139]** *Pour tout $p_0 > 1$, il existe des constantes finies bornant le ratio des deux quantités, quand on écrit*

$$\mathrm{Trace}(|[F, f]|^p) \asymp \int_\Omega \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)^{p-2} dz\, d\overline{z}$$

pour toute fonction univalente f et pour tout $p \geq p_0$.

(On utilise le symbole $\alpha \asymp \beta$ pour signifier que $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$ sont bornés.)

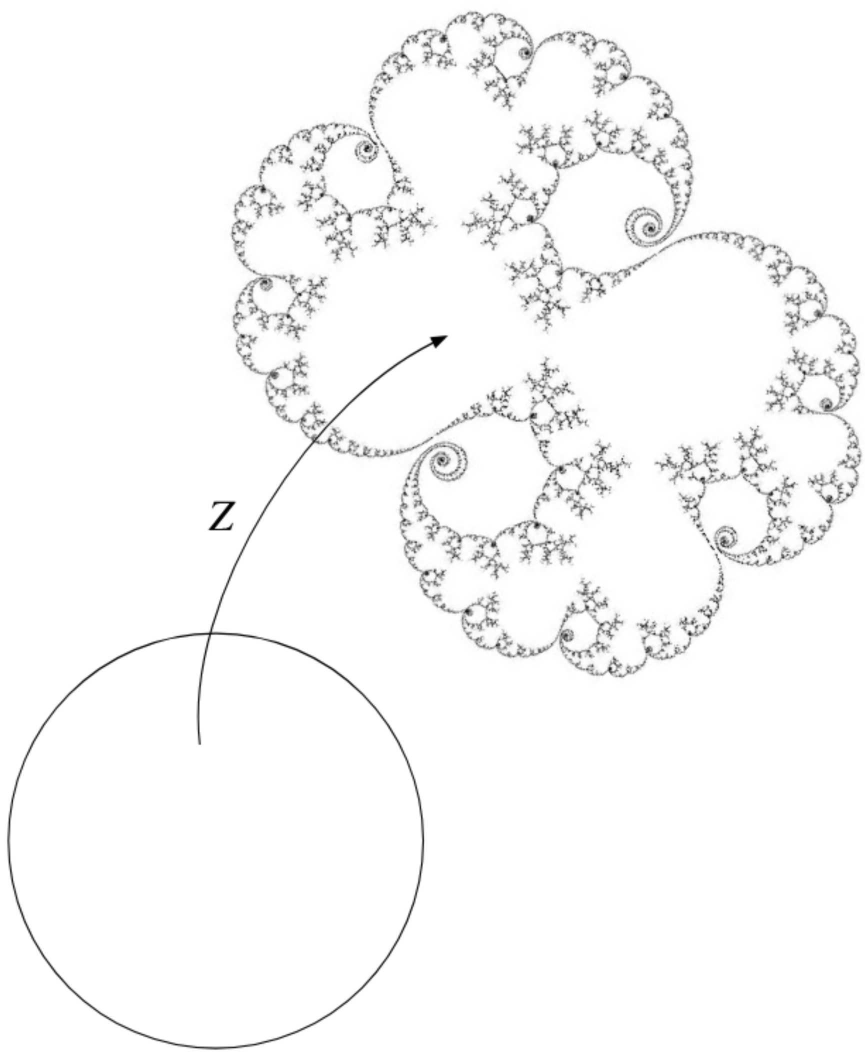


FIGURE 2. l'application de Riemann

L'intervalle des p tels que le côté droit est fini a une borne inférieure, appelée dimension de Minkowski de la frontière $\partial\Omega$ (cf. [202]). Il est facile de construire des domaines d'une dimension de Minkowski donnée p dans $]1, 2[$ pour $\partial\Omega$. On souhaite aller plus loin et relier, quand $\partial\Omega$ est une fractale, la mesure de Hausdorff p-dimensionnelle Λ_p à la formule

(4.22) $$\mathrm{Tr}_\omega(f(Z)\,|dZ|^p) \quad \forall f \in C(\partial\Omega)$$

où Tr_ω est la trace de Dixmier et $dZ = [F, Z]$ est la différentielle quantique. Ici Z est la valeur limite, $Z \in H^\infty(\mathbb{S}^1)$, d'une application univalente Z : Disque $\to \Omega$. La formule (11) définit une mesure de Radon si

(4.23) $$dZ \in \mathcal{L}^{(p,\infty)}$$

ce qui assure que $|dZ|^p \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$ est dans le domaine de la trace de Dixmier.

Bien sûr, Z n'est, en général, pas de variation bornée, et si nous avions pris dZ comme étant une distribution, les symboles $|dZ|$ et $|dZ|^p$ auraient été vides de sens.

Pour montrer que, en présence des symétries du domaine Ω, la mesure de Radon ci-dessus (11) a un poids conforme p, on montrera que, si l'on travaille module l'idéal $\mathcal{L}_0^{(p,\infty)} \subset \mathcal{L}^{(p,\infty)}$, les règles habituelles de calcul sont valides.

On note $\mathcal{L}_0^{p,\infty} \subset \mathcal{L}^{p,\infty}$ la fermeture de l'espace de Banach $\mathcal{L}^{p,\infty}$ de l'idéal R des opérateurs de rang fini. On a

$$T \in \mathcal{L}_0^{p,\infty} \iff \sigma_N(T) = o\left(\sum_{n=1}^{N} n^{-1/p}\right).$$

Pour $p > 1$, ceci est équivalent à $\mu_n(T) = o(n^{-1/p})$ mais pour $p = 1$, la condition $\mu_n(T) = o(\frac{1}{n})$ est plus forte que $T \in \mathcal{L}_0^{1,\infty}$. Alors, soit $p > 1$ et $C(\mathbb{S}^1)$ tel que sa différentielle quantique $df = [F, f]$ appartient à $\mathcal{L}^{p,\infty}$. Le résultat principal de cette section est que si l'on travaille modulo $\mathcal{L}_0^{p,\infty}$ alors les règles suivantes de calcul sont valides :

a) $(df)_g = g\, df \quad \forall g \in C(\mathbb{S}^1)$

b) $d(\varphi(f)) = \varphi'(f)df \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathrm{Spectrum}(f))$

c) $|d(\varphi(f))|^p = |\varphi'(f)|^p\, |df|^p$.

Dans a) et b), les égalités signifient que les opérateurs suivants appartiennent à l'idéal $\mathcal{L}_0^{p,\infty}$

$$[F.f]g - g[F, f] \;\;,\; [F, \varphi(f)] - \varphi'(f)[F, f].$$

Dans c), l'égalité est vérifiée modulo $\mathcal{L}_0^{1,\infty}$

$$|[F, \varphi(f)]|^p - |\varphi'(f)|^p\, |[F, f]|^p \in \mathcal{L}_0^{1,\infty}$$

En fait, on démontrera que les valeurs caractéristiques de ce dernier opérateur sont $o\left(\frac{1}{n}\right)$, ce qui est un résultat plus fort.

Les règles ci-dessus a), b) et c) sont des règles *classiques* de calcul, mais elles peuvent maintenant s'appliquer à une fonction non différentiable f, pour laquelle la dérivée en termes de distribution f' ne peut pas subir l'opération $x \to |x|^p$ comme le peut la différentielle quantique.

On va alors démontrer (avec $p \in [1, \infty[$ pour a) et b)) le :

Théorème 8.

a) *Soit* $f \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ *telle que* $[F, f] \in \mathcal{L}^{p,\infty}$ *et soit* $g \in C(\mathbb{S}^1)$*. Alors* $[F, f]g - g[F, f] \in \mathcal{L}_0^{p,\infty}$*.*

b) *Soient* $X_1, \ldots, X_n, \in C(\mathbb{S}^1), X_j = X_j^*$*, tels que* $[F, X_j] \in \mathcal{L}^{p,\infty}$*, et soit* $\varphi \in C^\infty(K)$ *une fonction lisse sur le spectre jointure* $K \subset \mathbb{R}^n$ *des* X_j *(i.e.* $K = X(\mathbb{S}^1)$*) où* $X = (X_1, ..., X_n)$*. Alors*

$$[F, \varphi(X_1, \ldots, X_n)] - \sum_{j=1}^{n} \partial_j \varphi(_1, \ldots, X_n)[F, X_j] \in \mathcal{L}_0^{p,\infty}.$$

c) *Soit* $p > 1, Z \in C(\mathbb{S}^1)$ *tel que* $[F, Z] \in \mathcal{L}^{p,\infty}$ *et soit* φ *une fonction holomorphe sur* $K = \text{Spectrum } Z = Z(\mathbb{S}^1)$*. Alors*

$$|[F, \varphi(Z)]|^p - |\varphi'(Z)|^p |[F, Z]|^p \in \mathcal{L}_0^{p,\infty}.$$

En fait, comme on l'a déjà mentionné, on démontrera le résultat plus fort que $\mu_n(T) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ pour l'opérateur T apparaissant dans c).

Preuve de a) et b)

a) L'application de $C(\mathbb{S}^1)$ dans $\mathcal{L}^{p,\infty}$ donnée par

$$g \mapsto [F, f]g - g[F, f] = T(g)$$

est de norme continue. Par conséquent, il suffit de montrer que pour $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, l'image $T(g)$ appartient à $\mathcal{L}_0^{p,\infty}$. En fait, on a $T(g) \in \mathcal{L}^1$ puisque g commute avec f alors que $[F, g] \in \mathcal{L}^1$.

b) L'application de $C^\infty(K)$ dans $\mathcal{L}^{p,\infty}$ donnée par

$$\varphi \mapsto [F, \varphi(_1, ..., X_n)]$$

est continue. Par conséquent, il suffit de vérifier que l'assertion est vraie pour les polynômes, ce qui découle facilement de a).

La preuve de c) fait intervenir des estimations générales sur l'application $A \to |A|^p$ par rapport aux normes σ_N. On rappelle d'abord que par [164] et [356], l'application $A \to |A|$ est une application de Lipschitz de $\mathcal{L}^{p,\infty}$ dans lui-même si l'on suppose que $p > 1$.

On a besoin du lemme suivant (cf. [50]):

Lemme 9. *Soit* $\alpha \in]0, 1[$*. Il existe* $C_\alpha < \infty$ *tel que pour tous opérateurs compacts* A *et* B *sur* $\mathcal{H}$*, on a*

$$\frac{1}{N} \sigma_N(|A|^\alpha - |B|^\alpha) \leq C_\alpha \left(\frac{1}{N} \sigma_N(A - B)\right)^\alpha.$$

Comme corollaire immédiat de ce lemme, on obtient la :

Proposition 10. Soit $p > 1$

1) Soient A, B des opérateurs bornés tels que $A - B \in \mathcal{L}_0^{p,\infty}$. Alors $|A|^\alpha - |B|^\alpha \in \mathcal{L}_0^{p/\alpha,\infty}$ pour tout $\alpha < 1$.

2) Si $A, B \in \mathcal{L}^{p,\infty}$ et $A - B \in \mathcal{L}_0^{p,\infty}$, alors pour tout $\alpha \leq p$, on a $|A|^\alpha - |B|^\alpha \in \mathcal{L}_0^{p/\alpha,\infty}$.

3) Pour A, B comme définis dans 2) et $\alpha = p$, on a $\mu_N(|A|^p - |B|^p) = o\left(\frac{1}{N}\right)$.

Preuve. 1) Avec $p_N = \frac{1}{N}\sigma_N$, on fait l'hypothèse que $p_N(A - B) = o(N^{-1/p})$. Il découle alors du lemme 9 que $p_N(|A|^\alpha - |B|^\alpha) = o(N^{-\alpha/p})$.

2) Soit $\alpha < 1$ tel que p/α est un entier k $(k > 1)$. Alors, par 1), on a $|A|^\alpha - |B|^\alpha \in \mathcal{L}_0^{k,\infty}$, alors que $|A|^\alpha, |B|^\alpha \in \mathcal{L}^{k,\infty}$.

Soit $S = |A|^\alpha$ et $T = |B|^\alpha$. On a $\mu_N(S) = O(N^{-1/k}), \mu_N(T) = O(N^{-1/k})$ et $\mu_N(S - T) = o(N^{-1/k})$. Par conséquent, en utilisant l'inégalité

$$\mu_{n_1+n_2+n_3}(XYZ) \leq \mu_{n_1}(X)\mu_{n_2}(Y)\mu_{n_3}(Z)$$

(cf. Section 2) ainsi que l'égalité

$$S^k - T^k = \sum S^j(S - T)T^{k-j-1}$$

on déduit que $\mu_N(S^k - T^k) = o\left(\frac{1}{N}\right)$.

La preuve de 2) est la même.

Appliquons cette proposition dans la preuve du théorème 8 c). D'abord, comme dans b), on a

$$[F, \varphi(Z)] - \varphi'(Z)[F, Z] \in \mathcal{L}_0^{p,\infty},$$

de telle façon que, par la Proposition 10.2, on obtient

$$|[F, \varphi(Z)]|^p - |\varphi'(Z)[F, Z]|^p \in \mathcal{L}_0^{1,\infty}$$

Ainsi, on a juste besoin de montrer que

$$|\varphi'(Z)[F, Z]|^p - |\varphi'(Z)|^p|[F, Z]|^p \in \mathcal{L}_0^{p,\infty}.$$

On peut remplacer $\varphi'(Z)$ par $f = |\varphi'(Z)|$ et remplacer $[F, Z]$ par $T = |[F, Z]|$ puisque $f[F, Z] - [F, Z]f \in \mathcal{L}_0^{p,\infty}$. Ainsi, il suffit d'utiliser le lemme suivant :

Lemme 11. Soit $p > 1, T \in \mathcal{L}^{p,\infty}, T \geq 0$ et soit f bornée, $f \geq 0$ telle que $fT - Tf \in \mathcal{L}_0^{p,\infty}$. Alors

$$f^{p/2}\, T^p\, f^{p/2}(f^{1/2}\, T\, f^{1/2}) \in \mathcal{L}_0^{1,\infty}.$$

3.γ La trace de Dixmier de $f(Z)|dZ|^p$. On va maintenant comparer la mesure de Hausdorff et la trace de Dixmier (Formule 11) dans un exemple ayant à voir avec les *cercles quasi-fuchsiens*.

On rappelle d'abord comment de tels quasi-cercles sont obtenus à partir d'un couple de points dans l'espace de Teichmüller $\mathcal{M}_g$ des surfaces de Riemann de genre $g > 1$. On définit $\sum_+$ et $\sum_-$, comme étant une paire de surfaces de Riemann de genre g, ainsi qu'un isomorphisme $\pi_1(\sum_+) = \Gamma = \pi_1(\sum_-)$ de leurs groupes fondamentaux correspondant à une orientation inversant l'homéomorphisme $\sum_+ \to \sum_-$. On rappelle le théorème d'uniformisation de jointure de L. Bers :

Théorème 12. [47] *Avec la notation ci-dessus, il existe un isomorphisme* $h : \Gamma \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ *entre* Γ *et un sous-groupe discret de* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ *dont l'action sur* $P_1(\mathbb{C}) = S^2$ *a une courbe de Jordan* C *comme ensemble limite et est propre et de quotient* $\sum_\pm$ *sur les composantes connexes* $U_\pm$ *du complémentaire de* C.

Le sous-groupe discret $h(\Gamma)$ est un groupe *quasi-fuchsien* et son ensemble limite C est un *quasi-cercle*. C'est une courbe de Jordan dont la dimension de Hausdorff est strictement plus grande que 1 ([64]). Choisissons une coordonnée dans $P_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de telle façon que $\infty \in \sum_-$ et utilisons le théorème de l'application de Riemann pour fournir une équivalence conforme

$$Z : D \to \Sigma_+ \subset \mathbb{C}$$

où $D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$ est le disque unité. Par le théorème de Carathéodory, la fonction holomorphe Z s'étend continument à $\overline{D} = D \cup \mathbb{S}^1$ et amène un homéomorphisme

$$Z : \mathbb{S}^1 \to C\ ;$$

La non différentiabilité de Z sur $\mathbb{S}^1$ est bien sûr une conséquence du manque de lissité de la courbe de Jordan C.

Puisque le domaine de la fonction Z sur $\mathbb{S}^1$ est égal à C, on voit que le spectre de l'opérateur de multiplication par Z dans $L^2(\mathbb{S}^1)$ est aussi égal à C, de telle façon que, pour $p > 0$, l'opérateur

$$f(Z)|dZ|^p$$

où f est une fonction sur $\mathbb{C}$, et $dZ = [F, Z]$ est défini comme ci-dessus, fait seulement intervenir la *restriction* de f au sous-ensemble C de $\mathbb{C}$, et dépend, bien sûr, linéairement de f.

Par construction, il y a un isomorphisme $g \to g_+$ entre Γ et un sous-groupe fuchsien Γ_+ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que

$$(*) \qquad g \circ Z = Z \circ g_+ \quad \forall g \in \Gamma,$$

où l'on considère $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{PSU}(1, 1)$ comme le groupe des automorphismes de D.

Utilisons d'abord l'égalité (*) pour réexprimer la condition

$$[F, Z] \in \mathcal{L}^q$$

en termes plus simples.

Lemme 13. *Soit $q > 1$. Alors $[F,Z] \in \mathcal{L}^q$ si et seulement si la suite de Poincaré est convergente pour un certain point, et de façon équivalente pour tous les $z \in \sum_+$:*

$$\sigma(q) = \sum_{g \in \Gamma} |g'(z)|q < \infty.$$

De plus, il existe des constantes c_q, C_q bornées différentes de 0 et ∞ pour $q \geq q_0 > 1$ telles que

$$c_q\, \sigma(q) \leq \mathrm{Tr}|[F,Z]|^q \leq C_q\, \sigma(q).$$

Preuve. Par construction, la fonction $Z \in C(\mathbb{S}^1)$ s'étend à une fonction holomorphe dans D, de telle façon qu'on peut appliquer le critère donné par la proposition 5 b), qui donne aussi une estimée sur la norme $\mathcal{L}^q$ de $[F,Z]$ en fonction de

$$\int_D |Z'(z)|^q\, (1-|z|)^{q-2} dz\, d\overline{z}.$$

Pour z dans $D, 1-|z|$ et $1-|z|^2$ sont comparables de telle façon qu'on peut aussi bien considérer l'expression

$$\int_D |Z'(z)|^q\, (1-|z|^2)^q (1-|z|^2)^{-2} dz\, d\overline{z}.$$

Si l'on munit D de sa métrique canonique hyperbolique riemanienne de courbure -1, la dernière expression est équivalente à

$$\int_D \|\nabla Z\|^q\, dv$$

où ∇Z est le gradient de la fonction Z dont la norme est évaluée par rapport à la métrique riemanienne, et où dv est la forme volume sur la variété riemannienne D. Alors soit $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{PSU}(1,1)$. Puisqu'il agit comme une isométrie sur D, on a

$$\|\nabla(Z \circ g)\|(p) = \|\nabla(Z)\|(gp) \quad \forall p \in D.$$

Pour $g_+ \in \Gamma_+$, on a $Z \circ g_+ = g \circ Z$, de telle façon que

$$\|\nabla(g \circ Z)\|(p) = \|\nabla(Z)\|(g_+ p) \quad \forall p \in D.$$

Le côté gauche est égal à $|g'(Z(p))|\, \|\nabla Z\|(p)$, de telle façon que

$$\|\nabla(Z)\|(g_+ p) = |g'(Z(p))|\, \|\nabla Z\|(p) \quad \forall p \in D, g \in \Gamma_+.$$

Alors soit $D_1 \subset D$ un domaine fondamental compact pour le groupe fuchsien Γ_+. On a l'égalité

$$\int_D \|\nabla Z\|^q\, dv = \int_{D_1} \sum_{g \in \Gamma} |g'(Z(p))|^q\, (\|\nabla Z\|(p))^q\, dv.$$

La compacité de D_1 donne alors l'uniformité requise dans $p \in D_1$, de telle façon que la conclusion en découle.

Maintenant soit p la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite C. On a $p > 1$ ((64]), et par [538], il découle que la série de Poincaré $\sigma(q)$ est convergente pour tout $q > p$, et diverge pour $q = p$.

Ainsi, on obtient désormais la :

Proposition 14. *On a* $[F, Z] \in \mathcal{L}^q$ *si et seulement* $q > p$ *est la dimension de Hausdorff de* C*.*

Mais on a besoin de savoir que $[F, Z] \in \mathcal{L}^{p,\infty}$ et que $\mathrm{Tr}_\omega(|[F, Z]^p) > 0$.

Lemme 15. *On a* $[F, Z] \in \mathcal{L}^{p,\infty}$.

Preuve. De la théorie de l'interpolation réelle (Appendice B) et par le critère ci-dessus, $\|\nabla Z\| \in L^q(D, dv) \iff [F, Z] \in \mathcal{L}^q$, on a juste besoin de montrer que

$$\|\nabla Z\| \in L^{p,\infty}(D, dv)$$

où l'espace de Lorentz $L^{p,\infty} = L^p_{\text{weak}}$ est l'espace des fonctions h sur D telles que pour une certaine constante $c < \infty$

$$v(\{z \in D\,; |h(z)| > \alpha\}) \leq c\alpha^{-p}.$$

Par conséquent, la preuve du lemme 13 montre que ce que l'on a juste besoin de démontrer, c'est que (uniformément pour $a \in D_1$), les suites $(|g'(Z(a))|\,;\, g \in \Gamma)$ appartiennent à $\ell^{p,\infty}(\Gamma)$, i.e.

$$\mathrm{Card}\{g \in \Gamma\,;\; |g'(Z(a))| > \alpha\} = O(\alpha^{-p}).$$

Cela découle du corollaire 10 dans la référence [538].

Ensuite, le comportement comme au pôle de $\int_D \|\nabla Z\|^s\, dv$ pour $s \to p+$, qui découle de [538], et le fait que le résidu en $s = p$ *n'est pas nul* ([538]) impliquent un comportement similaire pour $\mathrm{Tr}(|[F, Z]|^s)$, de telle façon que les valeurs caractéristiques

$$\mu_n = \mu_n([F, Z])$$

satisfont les conditions suivantes :

$\alpha)$ $\mu_n = O(n^{-1/P})$ (par le lemme 15) ;

$\beta)$ $(s - p)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^s \geq c > 0$ pour $s \in]p, p + \varepsilon]$.

On peut alors utiliser le lemme taubérien suivant :

Lemme 16. **[265]** *Soit* μ_n *une suite décroissante de nombres réels positifs satisfaisant* $\alpha)$ *et* $\beta)$*. Alors*

$$\liminf \frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N} \mu_n^p \geq c.$$

On est maintenant prêt à démontrer le théorème suivant. Dans l'énoncé, on fixe une trace de Dixmier Tr_ω une fois pour toutes.

Théorème 17. **[139]** *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ *un groupe quasi-fuchsien,* $C \subset P_1(\mathbb{C})$ *son ensemble limite, et* $Z \in C(\mathbb{S}^1)$ *les valeurs aux bornes de l'équivalence conforme du disque* D *avec* *la composante bornée du complémentaire de C. Alors soit p la borne inférieure de l'ensemble $\{q\ ; [F,Z] \in \mathcal{L}^q\}$. On a $p = \text{Hausdorff dim } C$ et $[F,Z] \in \mathcal{L}^{p,\infty}$. De plus, il existe un nombre fini réel λ tel que, avec Λ_p la mesure de Hausdorff p-dimensionnelle sur C,*

$$\int_C f\, d\Lambda_p = \lambda\, \mathrm{Tr}_\omega(f(Z)|[F,Z]|^p) \quad \forall f \in C_0(\mathbb{C}).$$

Preuve. La première partie découle de la proposition 14, Lemme 15 et Lemme 16. Il découle également du lemme 16 que $\mathrm{Tr}_\omega(|[F,Z]|^p) > 0$ de telle façon que l'on peut considérer que la mesure μ sur C est déterminée par l'égalité

$$\mu(f) = \mathrm{Tr}_\omega(f(Z)|[F,Z]|^p) \quad \forall f \in C(C)$$

On affirme que cette mesure a un poids conforme p, c'est-à-dire que pour tout $g \in \Gamma$, on a l'égalité

$$\int f \circ g^{-1}\, d\mu = \int |g'|^p\, f\, d\mu.$$

Pour prouver cela, soit $g_+ \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SU}(1,1)$ l'élément correspondant de Γ_+. Son action sur $L^2(\mathbb{S}^1)$ est donnée, pour $g_+^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$ par

$$(g_+\xi)(z) = \xi((\alpha z + \beta)(\overline{\beta} z + \overline{\alpha})^{-1})(\overline{\beta} z + \overline{\alpha})^{-1} \quad \forall z \in \partial D.$$

Cette égalité définit un opérateur *unitaire* W qui commute avec la transformation de Hilbert F, et les représentations correspondantes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sont les suites de mock discrètes. De plus

$$WZW^* = Z \circ g_+ = g \circ Z.$$

Ainsi, on arrive à l'égalité

$$W[F,Z]W^* = [F, g \circ Z].$$

Cela implique que $W|[F,Z]|^p\, W^* = |[F, g\circ Z]|^p$; par conséquent,

$$W(f \circ g^{-1}(Z))|[F,Z]|^p W^* = f(Z)|[F, g \circ Z]|^p.$$

Puisque la trace de Dixmier Tr_ω est une trace, on obtient

$$\mathrm{Tr}_\omega(f \circ g^{-1}(Z)|[F,Z]|^p) = \mathrm{Tr}_\omega(f(Z)|[F, g \circ Z]|^p),$$

et par le théorème 8 c), on a

$$\mathrm{Tr}_\omega(f(Z)|[F, g \circ Z]|^p) = \mathrm{Tr}_\omega(f(Z)|g'(Z)|^p|[F,Z]|^p).$$

de telle façon que

$$\int f \circ g^{-1}\, d\mu = \int f|g'|^p\, d\mu.$$

Il découle alors par [538] que μ est proportionnel à la mesure de Hausdorff p-dimensionnelle sur C.

La constante λ dans le théorème 17 devrait être indépendante du choix de ω. On démontrera cela dans un cas plus simple dans la section ε) où l'on relie également la valeur de $\mathrm{Tr}_\omega(|dZ|^p)$ à une fonction propre normalisée du laplacien dans l'espace hyperbolique (théorème 25).

La valeur de la constante λ est liée à la meilleure approximation rationnelle de la fonction Z en utilisant le résultat suivant :

Théorème 18. [3] *Soit $Z \in C(\mathbb{S}^1) \cap H^\infty$. Soit μ_n la distance, dans la norme* Sup *sur $\mathbb{S}^1$, entre Z et l'ensemble R_n des fractions rationnelles avec au plus n pôles en dehors du disque unité. Alors μ_n est la $n^{\text{ième}}$ valeur caractéristique de l'opérateur $[F, Z]$ dans $L^2(\mathbb{S}^1)$.*

Remarque 19. Soit $C \subset \mathbb{C}$ une courbe de Jordan dont la surface 2-dimensionnelle est *positive*, $\Lambda_2(C) > 0$. (L'existence de telles courbes est un ancien résultat d'analyse.) Soit Ω un domaine borné simplement connexe de frontière $\partial\Omega = C$ et soit Z : Disque $\to \Omega$ l'application de Riemann. Alors la finitude de la surface de $\overline{\Omega}$ montre que

$$dZ \in \mathcal{L}^2 \qquad (\text{i.e. } \mathrm{Trace}((dZ)^*\, dZ) < \infty).$$

Cela nous fournit un exemple très intéressant d'un espace C (ou de manière équivalente $\mathbb{S}^1$ avec la métrique $dZ\, d\overline{Z}$) qui a une mesure de Lebesgue 2-dimensionelle non nulle, mais dont la dimension à notre sens n'est pas 2 mais plutôt $2-$, d'autant que $\mathrm{Trace}((dZ)^*\, dZ)$ est *finie* plutôt que divergente logarithmiquement.

3.δ La mesure harmonique et la non normalité de la trace de Dixmier. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine de Jordan et $X = \partial\Omega$ sa frontière. En utilisant la valeur à la frontière $Z : \mathbb{S}^1 \to X$ d'une équivalence conforme avec le disque unité, $D \sim \Omega$, on peut composer un module de Fredholm $(L^2(\mathbb{S}^1), F)$ sur $\mathbb{S}^1$ donné par la transformation de Hilbert dans $L^2(\mathbb{S}^1)$ avec l'isomorphisme Z^* : $C(X) \to C(\mathbb{S}^1)$. On obtient ainsi un module de Fredholm sur $C(X)$ qu'on peut décrire directement sans référence spécifique à Z, comme suit. On a d'abord besoin de rappeler que chaque point $z_0 \in \Omega$ définit une mesure de probabilité unique ν_{z_0} sur $X = \partial\Omega$ par l'égalité

$$\int f\, d\nu_{z_0} = \widetilde{f}(z_0) \quad \forall f \in C(X)$$

où $\widetilde{f}$ est la fonction harmonique continue unique sur $\overline{\Omega}$ qui coïncide avec f sur $X = \partial\Omega$. La mesure ν_{z_0} est appelée la *mesure harmonique*, et sa classe est indépendante du choix de $z_0 \in \Omega$. On désigne donc par $\mathcal{H}_0 = L^2(X, \nu_{z_0})$ l'espace de Hilbert correspondant dans lequel $C(X)$ est représenté par les opérateurs multiplicatifs. La fonction constante 1 est un vecteur $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ tel que

$$\langle f\xi_0, \xi_0 \rangle = \int f\, d\nu_{z_0} \quad \forall f \in C(X).$$

Alors soit P_0 la projection orthogonale de $\mathcal{H}_0$ sur le sous-espace

$$P_0\mathcal{H}_0 = \{f\xi_0\, ; \widetilde{f} \text{ holomorphe dans } \Omega\}^-.$$

Proposition 20. *Si $F_0 = 2P_0 - 1$, alors $(\mathcal{H}_0, F_0)$ est un module de Fredholm sur $C(X)$ dont la classe d'isomorphisme est indépendante du choix de z_0 et est égale à $Z^*(L^2(\mathbb{S}^1), F)$ où $Z : \mathbb{S}^1 \to X$*

est la valeur à la frontière d'une équivalence conforme avec le disque unité, $D \to \Omega$.

La preuve est évidente mais cette présentation s'adaptera aux sous-ensembles de Cantor de $P_1(\mathbb{R})$ (cf. Section ε)).

Dès que la dimension de Hausdorff p de X est > 1, la mesure de Hausdorff Λ_p (si elle a du sens) est *singulière* par rapport à la mesure harmonique ν (cf. [384]). En fait, ν est portée par une union dénombrable d'ensembles de mesure linéaire finie ([384]) alors que Λ_p est vraiment p-dimensionnelle.

Avec le module de Fredholm de la proposition 20, et en spécialisant aux quasi-cercles du théorème 17, on a

$$\int f \, d\Lambda_p = \lambda \ \mathrm{Tr}_\omega(f(z)|dz|^p)$$

où z est l'application identité $X \to \mathbb{C}$. On affirme maintenant que cette formule contredirait la singularité mutuelle de Λ_p et ν si la trace de Dixmier Tr_ω s'avérait être *normale* (cf. le chaptitre V). En effet, pour tout poids normal ψ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$, et pour tout $T \geq 0, T \in$ domaine ψ, la forme linéaire

$$f \in C(X) \to \psi(T^{1/2} \ f \ T^{1/2})$$

est une mesure sur $C(X)$ qui est absolument continue par rapport à la mesure harmonique. C'est donc un grand atout de la trace de Dixmier de permettre, par sa non normalité, d'aller au-delà de la classe de mesure harmonique. Une illustration encore plus simple de ce fait est donnée dans la sous-section ci-après ε).

3. Ensembles de Cantor, trace de Dixmier et mesure de Minkowski. Pour comprendre la constante λ du théorème 17, on va travailler plus en détail le cas fuchsien, analogue mais plus simple.

Soit $K \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$ et supposons pour simplifier que K est complètement disconnecté sans points isolés. On décrira d'abord un module de Fredholm naturel $(\mathcal{H}, F)$ sur $C(K)$ (comparer avec la proposition 20). Soit $\Omega = K^c$ le complémentaire de K. On peut supposer pour la définition que $K \subset [0,1]$ avec $0, 1 \in K$. Alors, excepté pour $]-\infty, 0[\ \cup\ ]1, \infty[$, l'ensemble ouvert Ω est l'union disjointe d'une suite I_j, d'intervalles bornés. On dénote par $D \subset K$ l'ensemble dénombrable des extrémités des intervalles I_j. Chacun de ces intervalles détermine deux éléments b_j^+ et b_j^- de D avec $b_j^- < b_j^+, I_j =]b_j^-, b_j^+[$. Cela donne une partition $D = D^- \ \cup \ D^+$ de D en deux sous-ensembles disjoints. Une fonction harmonique h sur les composantes bornées de Ω est affine par morceaux sur les intervalles I_j, et est par conséquent spécifiée de manière unique par sa valeur sur D. Cela montre que la *classe de mesure harmonique* sur K est juste la mesure de comptage sur D, une mesure trivialement 0-dimensionnelle. Par analogie avec la proposition 20, on prendra par conséquent

$$\mathcal{H} = \ell^2(D) \ , \ (f\xi)(b) = f(b)\xi(b) \quad \forall b \in D \ , \ \forall f \in C(K) \ , \ \forall \xi \in \ell^2(D).$$

L'analogue de l'algèbre des fonctions holomorphes de la proposition 20 est l'algèbre des fonctions constantes par morceaux h sur Ω. Cela détermine le sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ donné par

$$P\mathcal{H} = \{\xi \in \mathcal{H} \ ; \ \xi(b_j^-) = \xi(b_j^+) \quad \forall b_j^{\pm} \in D\}.$$

On désigne alors par P la projection orthogonale de ce sous-espace, et soit $F = 2P - 1$.

Proposition 21.

a) *La paire $(\mathcal{H}, F)$ est un module de Fredholm sur $C(K)$.*

b) *Les valeurs caractéristiques de l'opérateur $dx = [F, x]$ (où $x \in C(K)$ est le plongement de K dans $\mathbb{R}$) sont les longueurs $\ell_j = |I_j|$ des intervalles I_j, chacun avec une multiplicité de 2.*

En effet, pour chaque intervalle I_j, la projection P_j est donnée par la matrice $P_j = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ de telle façon que $F_j = 2P_j - 1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Cela montre que pour tout $f \in C(K)$, l'opérateur $df = [F, f]$ est la somme directe des

$$[F_j, f] = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f(b_j^-) & 0 \\ 0 & f(b_j^+) \end{bmatrix}\right] = (f(b_j^+) - f(b_j^-)) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient alors facilement a) et b) ainsi que la

Proposition 22. Soit K un espace Minkowski mesurable et de dimension de Minkowski $p \in [0, 1]$. Alors $|dx|^p \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ et

$$\mathrm{Tr}_\omega(|dx|^p) = 2^p (1 - p)\, \mathcal{M}_p(K)$$

où $\mathcal{M}^p(K)$ est le contenu de Minkowski de K.

En effet, par [364], et avec les ℓ_j en ordre décroissant, on a une constante L telle que

$$\ell_j \sim L\, j^{-1/p} \quad \text{lorsque } j \to \infty\ ;\ \mathcal{M}_p(K) = 2^{1-p}(1 - p)^{-1} L^p.$$

Maintenant la mesurabilité de Minkowski de K est une condition beaucoup plus forte que la mesurabilité de l'opérateur $|dx|^p$. En particulier, pour les ensembles de Cantor auto-similaires les plus simples K, on verra que, alors que K n'est pas Minkowski mesurable, l'opérateur $|dx|^p$ est mesurable, et que la mesure $f \in C(K) \mapsto \mathrm{Tr}_\omega(f(x)|dx|^p)$ est un multiple non nul, indépendant de ω, de la mesure de Hausdorff.

Exemple 23. Soit $q \in \mathbb{N}, \lambda > 0$ avec $\lambda q < 1$. Soit $K \subset [0, 1]$ obtenu en enlevant q intervalles de longueur λ de telle façon que les $q + 1$ intervalles restant dans $[0, 1]$ aient la même longueur, et en itérant cette procédure. Après n étapes, on a $(q + 1)^n$ intervalles restant de longueur $\rho^n, \rho = (1 - \lambda q)/(q + 1)$ et on enlève $q(q + 1)^n$ intervalles de longueur $\lambda\rho^n$. Ainsi on a

$$\mathrm{Trace}(|dx|^s) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q(q + 1)^n (\lambda\rho^n)^s = 2q\lambda^s (1 – (q + 1)\rho^s)^{-1}.$$

Cela montre que pour $p = -\dfrac{\log(q + 1)}{\log \rho} \in]0, 1[$, l'opérateur $|dx|^p$ est mesurable et

$$\mathrm{Tr}_\omega(|dx|^p) = \frac{1}{p}\, \mathrm{Res}_{s=p}(\mathrm{Trace}\ |dx|^s) = -\frac{1}{p} 2\, q\, \lambda^p (\log\ \rho)^{-1} = \frac{2\, q\, \lambda^p}{\log(q + 1)}.$$

On vérifie que K n'est pas Minkowski mesurable, que sa dimension de Hausdorff est p et que, avec Λ_p la mesure de Hausdorff p-dimensionnelle, on a

$$\mathrm{Tr}_\omega(f(x)|dx|^p) = c\int f\, d\Lambda_p \quad \forall f \in C(K)$$

où $c = \dfrac{2q\lambda^p}{\log(q+1)} = \dfrac{2q}{\log(q+1)}(1-(q+1)^{1-1/p})^p$.

Cet exemple montre clairement que c, bien qu'indépendant de ω, n'est pas juste une fonction de p, en raison de l'échec de mesurabilité par mesure de Minkowski de K.

Exemple 24. Groupes fuchsiens de seconde espèce.

Soit K un sous-ensemble parfait du cercle $\mathbb{S}^1$ (i.e. K est fermé, totalement disconnecté et sans points isolés). La construction ci-dessus du module de Fredholm $(\mathcal{H}, F)$ sur K marche sans modification. On identifie $\mathbb{S}^1$ avec la frontière $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ du disque unité ouvert U dans $\mathbb{C}$ et on munit U de la courbure de Poincaré -1. La distance hyperbolique est donnée par l'égalité

$$d(z_1, z_2) = \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right), \quad \frac{1}{1-r^2} = \frac{|1-\overline{z}_1 z_2|^2}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)} \qquad \forall z_j \in U.$$

On désigne par $d\sigma$ la surface hyperbolique.

Soit $Y = \mathrm{Conv}(K)$ la fermeture géodésique convexe de K dans U. On l'obtient en enlevant de U une moitié d'espace (Figure 3) pour chaque composante intervalle I_j de $\mathbb{S}^1 \backslash K$.

Faisons agir $G = \mathrm{SU}(1,1)$ par les isométries sur U et, pour chaque $\alpha \in U$, soit d_α l'unique métrique riemannienne sur $\mathbb{S}^1$ qui soit invariante par le groupe d'isotropie G_α et normalisé de telle façon que $\mathbb{S}^1$ ait pour longueur 2π.

Pour $\alpha = 0$, ceci est simplement la métrique arrondie $|dz|^2$ sur $\mathbb{S}^1$ alors que pour α arbitraire, c'est $|dz_\alpha|^2$, où $z_\alpha(u) = \dfrac{u-\alpha}{1-\overline{\alpha}u} \quad \forall u \in \mathbb{S}^1$

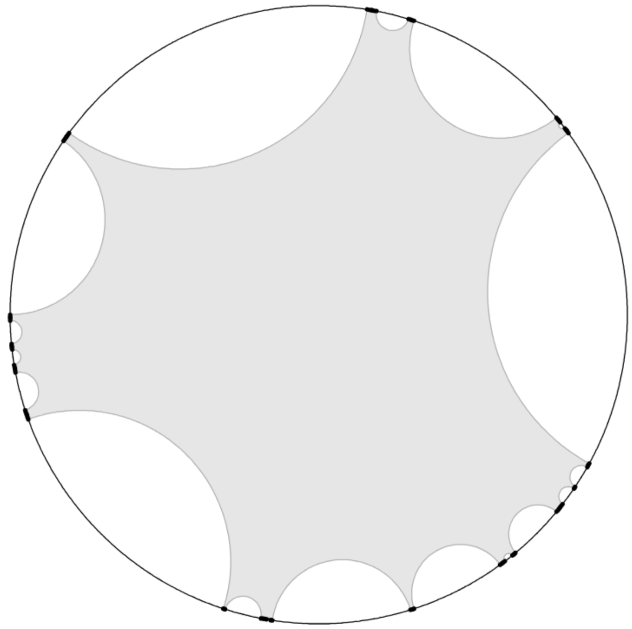


FIGURE 3. Fermeture convexe d'un ensemble parfait

Lemme 25. *Soit $\alpha \in U, K$ et $Y = \mathrm{Conv}(K)$ définie comme ci-dessus. Supposons que K est négligeable au sens de Lebesgue. Soit ℓ_j la longueur de la composante I_j de K^c dans $\mathbb{S}^1$ pour la métrique d_α et considérons les deux intégrales de Dirichlet*

$$\zeta_1(s) = \sum \ell_j^s, \qquad \zeta_2(s) = \int_Y e^{-sd(z,\alpha)}\, d\sigma(z).$$

Alors ζ_1 et ζ_2 ont la même abscisse de convergence $p \in [0,1]$, le même comportement en p, et dans le cas divergent, on a

$$\zeta_1(p+\varepsilon) \sim c(p)\ \zeta_2(p+\varepsilon) \quad \textit{lorsque} \quad \varepsilon \to 0+$$

où $c(p) = -4^p\, \Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)$.

La preuve est un calcul simple du comportement au voisinage de $\ell = 0$ de l'intégrale $\int_0^1 (\ell - \theta(\ell, 1-\varepsilon))\varepsilon^{p-2}\, d\varepsilon = \varphi_p(\ell)$, où $\theta(\ell, r)$ est égal à 0 si $\frac{1+r^2}{2r}\cos\ell \geq 1$ et à $\arccos\left(\frac{1+r^2}{2r}, \cos\ell\right)$ sinon. On a (Figure 4) $\zeta_2(s) = 2\sum \psi_s\left(\frac{1}{2}\ell_j\right)$, où $\psi_s(\ell) = \int_0^1 (\ell - \theta(\ell, 1-\varepsilon))\varepsilon^{s-2} 4(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)^{-s-2}\, d\varepsilon$ se comporte comme $2^{-s}\varphi_s(\ell)$ pour $\ell \to 0$. On montre alors que $\varphi_s(\ell) \sim \frac{1}{2} 4^s c(s)^{-1} \ell^s$ lorsque $\ell \to 0$.

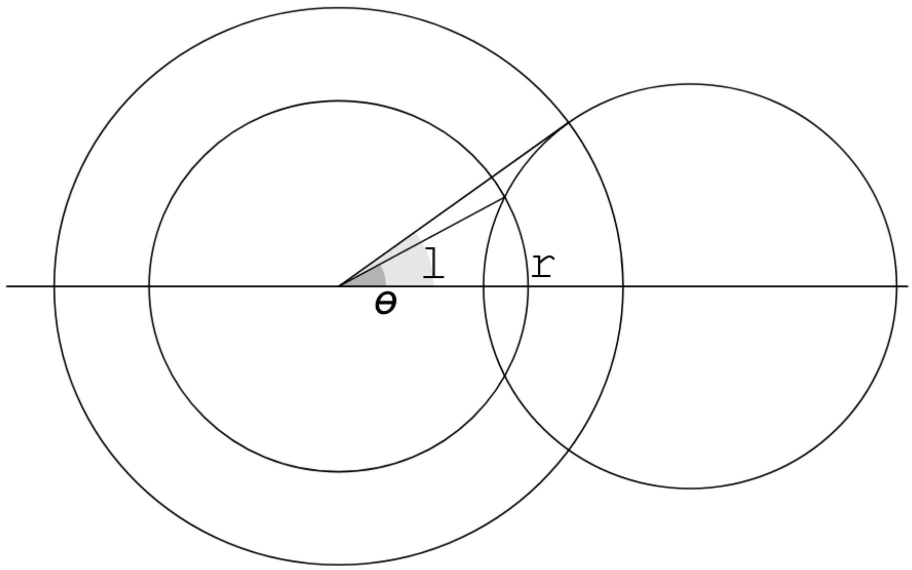


FIGURE 4. $\cos\theta = \dfrac{1+r^2}{2r}\cos\ell$

Maintenant soit $\Gamma \subset G$ un groupe fuchsien de seconde espèce. Son ensemble limite $K \subset \mathbb{S}^1$ est alors un ensemble parfait et, par [431], l'abscisse de convergence de la série de Poincaré

$$\sum_{g\in\Gamma} e^{-sd(gz,\alpha)}$$

est égale à la dimension de Hausdorff $p \in]0,1[$ de K.

En combinant la proposition 21, Lemme 25, et les résultats de [431] [432] et [537] [538], on obtient l'analogue suivant plus simple mais plus précis du théorème 17.

Théorème 26. *Soit Γ un groupe fuchsien de seconde espèce sans élément parabolique, $K \subset \mathbb{S}^1$ son ensemble limite, $Y = \mathrm{Conv}(K)$ sa fermeture convexe géodésique et $p = \mathrm{Hausdorff\ dim}(K)$. Supposons $p > \dfrac{1}{2}$ et soit h l'unique fonction harmonique de carré intégrable $p(1-p)$ sur U/Γ telle que $\displaystyle\int_{U/\Gamma} h^2\, d\sigma = \int_{Y/\Gamma} h\, d\sigma$.*

Soit $(\mathcal{H}, F)$ le module de Fredholm ci-dessus sur $C(K)$. Alors pour tout $\alpha \in U$, la mesure $f \in C(K) \to \mathrm{Tr}_\omega(f|dz_\alpha|^p)$ est indépendante de ω, proportionnelle à la mesure de Hausdorff Λ_p pour la restriction K de la métrique d_α, et sa masse totale est

$$\mathrm{Tr}_\omega(|dz_\alpha|^p) = (1-p)2^{p-1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)^2}\, h(\alpha).$$

9.γ Facteurs de type III$_\lambda$, $\lambda \in]0,1[$. Soit M un facteur de type III$_\lambda$, $\lambda \in]0,1[$, et soit $M = N \rtimes_\theta Z$ la décomposition discrète de M (Théorème 5.4). Alors si M est moyennable, il en est de même de N, comme on le voit en utilisant l'espérance conditionnelle normale naturelle, $E(\sum a_n U^n) = a_0 \in N$, de M dans N. Ainsi, puisque N est un facteur de type II$_\infty$, il est par le théorème 5 isomorphe à $R_{0,1}$ et $\theta \in \mathrm{Aut}(R_{0,1})$ satisfait $\mathrm{Mod}(\theta) = \lambda$. Par les résultats de la théorie ergodique non commutative (théorème 6.16), on sait que θ est unique à conjugaison extérieure près, ce qui implique donc le

Théorème 8. **[90]** *Soit* $\lambda \in [0,1]$. *Il existe à isomorphisme près seulement un facteur moyennable de type* III$_\lambda$, *le facteur de Powers* R_λ.

On renvoie à la section 4 pour la description de R_λ comme ITPFI. Comme ci-dessus, l'analogue du théorème 8 est vérifié si l'on remplace le mot moyennable par le mot hyperfini : R_λ est le seul facteur hyperfini de type III$_\lambda$. Ces facteurs R_λ décrivent la théorie de la mesure des fractals les plus simples, notamment les ensembles de Cantor auto-similaires du chapitre IV section 3 exemple 23. Rappelons d'abord qu'étant donnée une paire (A, φ) constituée d'une C^* algèbre A et d'un état φ sur A, il existe une algèbre de von Neumann qui lui est canoniquement associée : la fermeture faible A'' de A dans la représentation GNS (cf. la section 2). Soit $K \subset [0,1]$ l'ensemble auto-similaire de Cantor de IV.3.23, et soit $C(K)$ agissant par les opérateurs de multiplication dans $\ell^2(D)$ comme dans IV.3.21, où $D \subset K$ est l'ensemble dénombrable des points extrémités de K. Un ensemble auto-similaire σ de K est la restriction à Domaine$(\sigma) = K \cap J$, où J est un intervalle fermé d'une transformation affine $x \mapsto \sigma(x) = ax + b$ de $\mathbb{R}$ qui préserve K, i.e.

$$\sigma(x) \in K \qquad \forall x \in \text{Domaine}(\sigma). \tag{5.14}$$

Proceedings du congrès international des mathématiciens
Helsinki, 1978

Algèbres de von Neumann

A. Connes

Pour tout opérateur auto-adjoint T dans l'espace de Hilbert H [2], $f(T)$ a du sens non seulement dans le cas évident où f est un polynôme mais également si f est juste mesurable, et si $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ (avec (f_n) bornée) alors $f_n(T) \to f(T)$ faiblement, i.e. $\langle f_n(T)\xi, \eta\rangle \to \langle f(T)\xi, \eta\rangle$ $\forall \xi, \eta \in H$. De plus, l'ensemble $\{f(T), f$ mesurable$\}$ est l'ensemble de tous les opérateurs S dans H invariants par toutes les transformations unitaires de H qui fixent T. Plus généralement, si $(T_i)), i = 1, ..., k$, sont des opérateurs dans H alors la fermeture faible de l'ensemble des polynômes dans T_i, T_i^* est l'espace de tous les opérateurs dans H invariants par tous les unitaires fixant les T_i, comme cela découle du théorème de la bicommutation de von Neumann (1929):

Un sous-ensemble M de $L(H)$ est le commutant d'un sous-groupe G du groupe unitaire $U(H)$ ssi il est une *sous-algèbre faiblement fermée de $L(H)$ (contenant l'identité 1).

Une telle algèbre est appelée une algèbre de von Neumann (ou anneau d'opérateurs). Toute telle algèbre commutative est de la forme $\{f(T), f$ mesurable$\}$ pour un auto-adjoint T, et par conséquent est l'algèbre de fonctions mesurables principalement bornées : $L^\infty(\text{Spectrum } T, \text{mesure spectrale } T)$. En général, le centre de M est une algèbre commutative de von Neumann et par conséquent est un $L^\infty(X, \mu)$ pour un certain espace de mesure X, alors $M = \{(T(X))_{x\in X}, T(x) \in M(x)\ \forall x\}$ est l'algèbre de toutes les sections mesurables principalement bornées d'une famille $M(x), x \in X$, d'algèbres de von Neumann de centres triviaux, i.e. de *facteurs*. Si $M = \pi(G)'$ est, pour commencer, le commutant d'une représentation unitaire π du groupe G, par la décomposition ci-dessus, π devient l'intégrale directe de *représentations par des facteurs* π_x, i.e. des représentations avec $\pi_x(G)'$ un facteur. Comme les sous-représentations de π correspondent bijectivement à des idempotents auto-adjoints de $M = \pi(G)'$, dire que $\pi_x(G)'$ est un facteur signifie que n'importe quelles deux sous-représentations de π_x ont une sous-représentation commune. En dimension finie, cela signifie que π_x est un multiple d'une sous-représentation irréductible, i.e. que $\pi_x(G)'$ est $M_n(\mathbf{C})$, avec $n =$ la multiplicité de π_x, mais en dimension infinie, il n'est pas toujours vrai que π_x a une sous-représentation irréductible, ou de façon équivalente, qu'un facteur a toujours une projection minimale. En fait, c'est le cas si ce facteur provient d'une factorisation satisfaisante de H comme produit tensoriel : $H = H_1 \otimes H_2$ avec $M = \{T \otimes 1, T \in L(H_1)\}$. Murray et von Neumann ont découvert l'existence de

[2] De base orthonormée dénombrable infinie.

facteurs M ne provenant pas des factorisations triviales ci-dessus de H, et en traduisant en termes de projections dans M (i.e. en termes d'idempotents auto-adjoints avec $e = e^2 = e^* \in M$) et en comparant les sous-représentations qu'ils ont obtenues, ils ont obtenu la *théorie de la multiplicité* suivante :

Théorème *Soit M un facteur, alors il existe une unique injection (à normalisation près) de classes d'équivalence de projections de M dans $[0, +\infty]$ telle que :*

$$\dim_M(e + f) = \dim_M(e) + \dim_M(f) \quad \text{à chaque fois que} \quad e \perp f$$ [3],

et si son domaine est

$\{0, 1, ..., n\}$ alors M est de type I_n,

$\{0, 1, ..., \infty\}$ alors M est de type I_∞,

$[0, 1]$ alors M est de type II_1,

$[0, +\infty]$ alors M est de type II_∞,

$\{0, +\infty\}$ alors M est de type III.

L'exemple le plus simple d'un facteur qui n'est pas de type I est l'algèbre de groupe d'un groupe discret infini Γ tel que le sous-groupe normal des classes finies est trivial. On a que $R(\Gamma)$ est engendré dans $\ell^2(\Gamma)$ par les translations à droite, c'est le commutant des translations à gauche, et c'est un facteur. Si ξ est le vecteur de base associé dans $\ell^2(\Gamma)$ à l'unité de Γ alors la trace fonctionnelle $\mathrm{Trace}_\Gamma(A) = \langle A\xi, \xi\rangle$ sur $R(\Gamma)$ satisfait :

$$\mathrm{Trace}_\Gamma(AB) = \mathrm{Trace}_\Gamma(BA) \quad \forall A, B,$$

$$\mathrm{Trace}_\Gamma(1) = 1$$

ce qui est impossible si M est de type I_∞, i.e. isomorphe à $L(H_1)$ puisque tout $A \in L(H_1)$ est une somme finie de commutateurs. Ce qui est surprenant dans le cas II_1 (ou II_∞), c'est que la dimension relative d'une projection $e \in M$ (ou de manière équivalente, la multiplicité relative des sous-représentations de π) peut être *n'importe quel nombre réel* α, même un nombre irrationnel, dans $[0, 1]$. De plus, si l'on définit pour tout auto-adjoint $T \in M$, sa trace relative par $\mathrm{Trace}_M(T) = \int \lambda \, \dim_M(dE_\lambda)$ (où $E_\lambda = 1_{]-\infty,\lambda]}(T)$ est la résolution spectrale de T), alors, bien qu'il soit facile de vérifier que $\mathrm{Trace}_M(TT^*) = \mathrm{Trace}_M(T^*T) > 0 \quad \forall T$, l'*additivité de la trace*, $\mathrm{Trace}_M(T_1 + T_2) = \mathrm{Trace}_M(T_1) + \mathrm{Trace}_M(T_2)$, $\forall T_1, T_2$ a été un autre résultat surprenant de Murray et von Neumann.

Aux alentours de 1940, Gelfand et Naimark ont découvert une classe remarquable d'algèbres de dimension infinie sur $\mathbf{C}$. Parmi ces algèbres sur $\mathbf{C}$, les C^* algèbres sont caractérisées par la condition

[3] i.e. $ef = fe = 0$.

très simple [1]:

$$\|x\| = \sqrt{\text{rayon spectral de } x^*x} \text{ est une norme complète.}$$

Celles qui sont commutatives (avec unité) sont canoniquement isomorphes aux algèbres des fonctions continues sur leur spectre compact. Toute * sous-algèbre fermée par la norme de $L(H)$ est une C^* algèbre et inversement, toute C^* algèbre a une représentation fidèle dans un espace de Hilbert. Si $A = C(X)$ est une C^* algèbre commutative et si π est une représentation de A dans H, alors chaque coefficient $f \to \langle \pi(f)\xi, \xi \rangle$ est une fonctionnelle linéaire positive sur $C(X)$, i.e. une mesure de Radon sur X. Dans la situation non commutative, les fonctionnelles positives linéaires (i.e. les éléments φ de A^* avec $\varphi(x^*x) \geq 0$) existent toujours à profusion (grâce à la convexité de $\{x^*x, x \in A\}$) et chacun d'eux détermine un espace de Hilbert : la complétion H_φ de A par le produit scalaire $\langle x, y \rangle_\varphi = \varphi(y^*x)$ et une représentation π_φ de A dans H_φ par multiplication à gauche. Cela étend la construction habituelle de $L^2(X, \mu)$ pour une mesure de Radon μ sur l'espace compact X, et comme dans le cas commutatif, l'intégrale s'étend aux fonctions continues, i.e. ici, les algèbres de von Neumann $\pi_\varphi(A)''$ engendrées par A dans H_φ.

Comme exemple, décrivons l'analogue non commutatif de la construction de l'espace de probabilité associé à l'expérience du lancer de pièce. Au lieu de la mesure de Radon μ sur l'ensemble de Cantor, $X = \prod_1^\infty X_\nu,\ X_\nu = \{a, b\}$, définie par

$$\mu(f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_k \otimes 1) = \prod_1^k \mu(f_i)$$

on considère sur la C^* algèbre A, la limite inductive des $\bigotimes_1^k M_2(\mathbf{C})$, la fonctionnelle linéaire positive Ψ telle que

$$\Psi(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_k \otimes 1) = \prod_1^k \varphi(x_i)$$

où φ est une fonctionnelle linéaire positive sur $M_2(\mathbf{C})$ avec $\varphi(1) = 1$ (un tel φ est appelé un état, parce qu'il correspond à un état du système de mécanique quantique avec $M_2(\mathbf{C})$ l'algèbre des observables). À équivalence des unitaires près, φ est toujours de la forme

$$\varphi_\lambda(x) = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right) x_{11} + \left(\frac{1}{1+\lambda}\right) x_{22} \quad \forall x = [x_{ij}] \in M_2(\mathbf{C}).$$

Les algèbres de von Neumann correspondantes $R_\lambda = (\pi_{\varphi_\lambda}(A))''$ sont les facteurs de type III et R. Powers (motivé par la théorie des champs quantique) a prouvé en 1967 qu'ils *sont mutuellement non isomorphes*. Précédemment, seul un nombre fini de facteurs non de type I étaient connus. Le problème de la classification des algèbres de von Neumann à *isomorphisme spatial près* (i.e. comme paires (H, M)) était depuis le début de la théorie réduit au problème de l'*isomorphisme algébrique*. (Si M est un facteur, alors les isomorphismes de M avec les algèbres de von Neumann dans H sont paramétrés à équivalence près par un entier $n \in \{1, ..., \infty)$ dans le cas du type I, par un réel $\lambda \in]0, +\infty]$ dans le cas du type II et sont tous équivalents dans le cas du type III). De plus, une * algèbre abstraite M est une algèbre de von Neumann ssi (1) comme C^* algèbre (2) d'un espace de Banach, c'est un dual [31]. De plus, le prédual d'une C^* algèbre M est unique, s'il existe, et c'est l'espace des fonctionnelles linéaires σ-additives φ sur M (i.e. $\varphi(\sum_\alpha) = \sum \varphi(_\alpha)$ pour toute famille de projections orthogonales deux à deux). Une *variété feuilletée* † donne naissance de façon naturelle à une telle algèbre de von Neumann abstraite $R(\dagger)$. Soit Ω l'ensemble des feuilles de †, un opérateur aléatoire $T = (T_f)_{f\in\Omega}$ est une famille bornée mesurable d'opérateurs, T_f agissant dans $L^2(f)$ pour tout f. Les sommes, le produit et l'* sont définis point par point, et comme dans la théorie classique de la mesure, on néglige tout ensemble de feuilles dont l'union dans V est négligeable (ici pour la classe de mesure lisse) et tout opérateur aléatoire T avec $T_f = 0$ pour presque toutes les feuilles. Ainsi $R(\dagger)$ joue le rôle de l'algèbre de tous les opérateurs bornés dans "L^2 (feuille générique de †)". Il n'est pas de type I en général, c'est un facteur si et seulement si † est ergodique (i.e. toute fonction mesurable sur V, constante sur les feuilles, est a.e. constante), et il peut être de type II_∞ ou III. Si Λ est une mesure transverse d'holonomie invariante pour †, on peut donner un sens à $\varphi(T) = \int \mathrm{Trace}(T_f)d\Lambda(f)$ pour tout opérateur positif aléatoire T [4], et cela définit sur l'algèbre de von Neumann M des opérateurs aléatoires (modulo l'égalité Λ presque partout) une fonctionnelle φ satisfaisant :

(1) φ *est un poids sur* M *i.e. c'est une application linéaire de* M_+ vers $[0, +\infty]$, $\varphi\ (\mathrm{Sup}T_\alpha) = \mathrm{Sup}\ \varphi(T_\alpha)$ pour toute famille croissante bornée, et il y a assez de T avec $\varphi(T) < \infty$ pour engendrer M.

(2) φ est *fidèle* : $\varphi(T) > 0$, $\forall T > 0$ dans M.

(3) φ est une trace i.e. φ est invariante unitairement, $\varphi(UTU^{-1}) = \varphi(T)$.

Ici (3) est la traduction de l'invariance d'holonomie de Λ.

Toute algèbre de von Neumann M a un poids fidèle ; celles qui possèdent une trace fidèle sont dites *semi-finies*. L'*additivité de la trace* de Murray et von Neumann montre qu'un facteur échoue à être semi-fini ssi il est de type III. Aux alentours de 1950, Dixmier et Segal ont montré d'importantes conséquences de la semi-finitude. On peut définir, comme en théorie de l'intégration classique, les espaces L^p par les normes

$$\|x\|_p = (\mathrm{Trace}_M|x^p|)^{1/p} \quad \text{où } x \in M, |x| = \sqrt{x^*x}.$$

Alors L^1 est le prédual M_*, et la représentation π de M par multiplication à gauche dans L^2 satisfait le théorème de commutation :

$$\pi(M)' = J\pi(M)J, \quad J\ :\ L^2 \to L^2, \quad J^2 = 1$$

où J est l'involution isométrique $x \to x^*$ dans L^2. Comme corollaire, on obtient le théorème de commutation pour les produits tensoriels ($(M_1 \otimes M_2)' = M_1' \otimes M_2'$) pour M_1 et M_2 *semi-finies* et pour tout groupe localement compact *unimodulaire* G, le fait que la représentation régulière à droite engendre l'algèbre de von Neumann $R(G)$ des opérateurs invariants à gauche dans $L^2(G)$. Le poids naturel $\varphi_G(f) = f(e)$ (e l'unité de G) sur l'algèbre de convolution $R(G)$ est une trace ssi G est unimodulaire. J. Dixmier a obtenu le résultat ci-dessus également pour G *non unimodulaire*, et c'est Tomita qui a réussi à démontrer les deux autres résultats (l'existence de $\pi(n, J)$ et le théorème de commutation pour les produits tensoriels) pour les algèbres de von Neumann ; cette théorie, une

[4]Elle peut être finie même si Trace $T_f = +\infty$ pour tout $f \in \Omega$, voir [8] pour plus de détails.

fois complétée par la théorie générale des poids (Takesaki, Combes, Pedersen, Haagerup) peut être résumée de la façon suivante :

Au lieu de commencer par une trace, on commence par un poids fidèle φ sur M. Le défaut de la propriété traciale pour φ crée deux produits scalaires naturels $\varphi(x^*x)$ et $\varphi(xx^*)$ et par conséquent, un opérateur positif (non borné) Δ_φ, dans l'espace de Hilbert H_φ du premier produit scalaire. Dans le cas de l'algèbre de groupe, H_φ est identique à $L^2(G)$ et Δ_φ est la multiplication par le module Δ_G de G. Dans ce cas particulier, puisque Δ_G est un homomorphisme (de G vers $\mathbf{R}_+^*$), il en découle que le groupe à un paramètre d'unitaires Δ_φ^{it} normalise $R(G)$. Le résultat le plus remarquable de Tomita est que le fait suivant est un fait général :

Théorème. *Soit M agissant dans H_φ par multiplications à gauche, alors* $\Delta_\varphi^{it} M \Delta_\varphi^{-it} = M \ \forall t \in \mathbf{R}$.

Ce résultat devint central lorsque Takesaki découvrit que le groupe d'automorphismes à un paramètre correspondant à $M(\sigma_t^\varphi(x) = \Delta_\varphi^{it} x \Delta_\varphi^{-it} \ \forall t \in \mathbf{R})$ est caractérisé (dans son lien à φ) par une forme algébrique [5] de la condition bien connue en physique quantique statistique comme condition de Kubo Martin Schwinger. (Si A est l'algèbre des observables, φ un état statistique, et σ_t l'évolution temporelle, un groupe d'automorphismes de A, alors (φ, σ) satisfait la condition de Kubo Martin Schwinger à l'inverse de la température β ssi $\varphi(x\sigma_{-i\beta}(y)) = \varphi(yx), y \in A$. Quand $A = L(H)$ et $\sigma_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$ où H est l'hamiltonien, l'unique φ satisfaisant cette condition est l'état de Gibbs $x \to \text{Trace}(e^{-\beta H})/\text{Trace}(e^{-\beta H})$.) Après la découverte de Powers en 1967 du non-isomorphisme des facteurs $R_\lambda, \lambda \in]0,1[$, Araki et Woods ont analysé les produits tensoriels infinis des facteurs de dimension finie au moyen de deux invariants, calculables en fonction de la liste des valeurs propres,

$$r_\infty(M) = \{\lambda \in \mathbf{R}_+^* \mid M \otimes R_\lambda \text{ est isomorphe à } M\},$$

$$\varrho(M) = \{\lambda \in \mathbf{R}_+^* \mid M \otimes R_\lambda \text{ est isomorphe à } R_\lambda\}.$$

Mon point de départ a été l'existence de formules simples reliant, dans le cas particulier considéré par Araki et Woods, ces invariants et la théorie de Tomita Takesaki, notamment :

$$r_\infty(M) = \bigcap_\varphi \text{Sp } \Delta_\varphi, \quad \varrho(M) = \{e^{2\pi/T}, \ T \in \bigcup_\varphi \text{Ker } \sigma^\varphi\}.$$

Cela suggérait que cela avait un intérêt d'étudier en eux-mêmes les invariants $S(M) = \cap_\varphi \text{ Sp } \Delta_\varphi$ et $T(M) = \cup_\varphi \text{ Ker } \sigma^\varphi$. La première question était la calculabilité. Dans le cas semi-fini, tous les poids φ sont de la forme $\varphi(x) = \text{Trace}_M(\varrho x)$ où ϱ est un opérateur positif et où le spectre de Δ_φ est la fermeture de l'ensemble des ratios $\lambda_1/\lambda_2, \lambda_i \in$ Spectrum ϱ alors que $\sigma_t(x) = \varrho^{it} x \varphi^{-it}$ pour $x \in M$, en prenant $\varphi = \text{Trace}_M, S(M) = \{1\}, T(M) = R$. Dans le cas du type III, le groupe à un paramètre σ^φ n'est jamais intérieur mais le résultat suivant a résolu complètement le problème de la calculabilité de S et T.

Théorème. *Soit M une algèbre de von Neumann,* $\text{Aut}\, M$ *son groupe d'automorphismes,* $\varepsilon : \text{Aut}\, M \to \text{Out}\, M = \text{Aut}\, M/\text{Int}\, M$ *l'application quotient canonique, et φ un poids sur M. Alors un groupe d'automorphismes à un paramètre de M, $(\alpha_t)_{t \in R}$ est de la forme σ^Ψ pour un Ψ adéquat*

[5] Identifiée par Haag Hugenholtz et Winnink en 1966.

ssi $\varepsilon(\alpha_t) = \varepsilon(\sigma_t^\varphi)\ \forall t \in R.$

En particulier, avec un facteur de type III, il y a un homomorphisme canonique $\delta : \mathbf{R} \to \operatorname{Out} M$, avec $\delta(t) = \varepsilon(\sigma_t^\varphi)$ pour *tout* poids φ. De plus, avec une notion adéquate de spectre pour δ, on a :

$$S(M) = \text{Spectrum }\delta,\ T(M) = \text{Noyau de }\delta.$$

En particulier, les deux sont des sous-groupes (de $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}$). Comme S est fermé et comme les sous-groupes fermés de $\mathbf{R}_+^*$ forment un intervalle compact $[0,1]$, on obtient une classification plus précise des facteurs de type III :

M est de type III_λ, $\quad \lambda \in]0,1[$, $\quad$ si $S(M) = \{0\} \cup \lambda^Z$,

M est de type III_0, $\quad$ si $S(M) = \{0,1\}$,

M est de type III_1, $\quad$ si $S(M) = [0,+\infty[$.

Dans le cas des feuilletages, l'invariant S de l'algèbre de von Neumann coïncide avec l'*ensemble ratio* introduit par W. Krieger en théorie ergodique comme une généralisation de l'ensemble ratio d'Araki-Woods.

En le disant simplement, pour évaluer l'ensemble ratio d'un feuilletage, on voyage sur la feuille générique du point a à un point b qui est proche de a dans V (mais à n'importe quelle distance sur la feuille) et on compare l'unité du volume transverse dans a avec sa transformée sous l'holonomie en b ; l'ensemble de tous ces ratios principaux coïncide avec S, et est donc une obstruction naturelle à l'existence d'un choix pour l'invariant d'holonomie de l'unité de volume dans le fibré transverse.

Exactement comme en algèbre non commutative quand on utilise le produit croisé d'une algèbre par un groupe d'automorphismes, on définit le produit croisé d'un facteur N par un automorphisme θ (il est caractérisé comme une algèbre de von Neumann M engendrée par N et par un unitaire U avec $UxU^* = \theta(x)\ \forall x \in N$, de telle façon que l'égalité $\sigma_t(x) = x\ \forall x \in N, \sigma_t(U) = e^{it}U$ définit un automorphisme de M pour tout $t \in \mathbf{R}$).

La théorie générale des facteurs de type III_λ, $\lambda \in]0,1[$ se résume comme suit :

(a) Soit N un facteur de type II_∞ et θ un automorphisme avec $\mathrm{mod}(\theta) = \lambda$ (i.e. $\mathrm{Trace}_N \circ \theta = \lambda\ \mathrm{Trace}_N$) ; alors le produit croisé $N \otimes_\theta Z$ est un facteur de type III_λ.

(b) Tout facteur de type III_λ est de la forme (a), et d'une manière unique, i.e. si (N_i, θ_i) donne la même M, il existe un isomorphisme $N_1 \to N_2$ envoyant θ_1 sur θ_2.

Dans le cas III_0, on a démontré une description analogue discrète mais la compréhension définitive et la solution du cas III_1 est contenue dans le résultat suivant de Takesaki :

Tout facteur de type III est de la forme $N \otimes_\theta \mathbf{R}_+^*$ où N est une algèbre de von Neumann de type II_∞ (i.e. dans sa décomposition centrale $N = \{(x(u)), x(u) \in N(u)\ \forall u\}$, tout $N(u)$ est un facteur de type II_∞) et où pour une certaine trace τ sur N, on a $\tau \circ \theta_\lambda = \lambda\tau$. De plus, cette décomposition est unique comme ci-dessus, et :

La restriction de θ_λ à A définit un flot ergodique $F(M)$, qui est un invariant de M. Ce flot a une interprétation très naturelle comme flot abstrait de poids sur M.

On a $S(M) = \{\lambda, F_\lambda = \mathrm{id}\}$; quand M est de type III_1, il découle de cela que N est un facteur donc on obtient l'analogue de (a), (b) avec le groupe $\mathbf{Z}$ remplacé par $\mathbf{R}$.

Dans le cas III_λ, $N = \{(x(u))_{u\in S^1}, x(u) \in N(u), \forall u \in \mathbf{S}^1\}$ de telle façon que N "fibre sur un cercle", et le θ de (a), (b) est θ_λ. Le théorème de structure ci-dessus pour les facteurs de type III_λ se réduit pour établir une classification dans ce cas à

(1) Classifier les facteurs de type II_∞.

(2) Étant donné un facteur N, de type II_∞, classifier (à conjugaison près) son automorphisme avec module $\lambda, \lambda \in]0,1[$.

Tout facteur de type II_∞ est le produit tensoriel d'un facteur de type II_1 par le facteur de type I_∞. Dans le dernier de leurs articles, Murray et von Neumann ont montré que, bien qu'il existe plus d'un facteur de type II_1 (ils en ont exhibé 2, et en 1968, D. MacDuff construisit un continuum de tels facteurs) il n'y en a parmi eux qu'un seul ayant la propriété suivante d'approximation : $\forall$ sous-ensemble fini F de N, $\forall \varepsilon > 0, \exists$ une * sous-algèbre finie-dimensionnelle K avec distance $(x, N) \leq \varepsilon,\ x \in F$ (où la distance est dans l'espace de Hilbert L^2 de la trace). Comme n'importe quel autre facteur de type II_1 contient cet unique facteur hyperfini, il était alors naturel de penser que c'est le plus simple de tous et de considérer le problème (2) dans ce cas-là. La réponse est la suivante :

Pour $\lambda \in]0,1[$, il existe, à conjugaison près, seulement un automorphisme de $R_{0,1} = R \otimes \mathrm{I}_\infty$ de module λ.

Si $1/\lambda$ est un entier n, on peut construire θ_λ comme le décalage (shift) sur $R_{0,1}$ construit comme un produit tensoriel infini de matrices $n \times n$. Comme autre exemple, si T est le difféomorphisme de Anosov du 2-tore $\mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^2$ défini par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ alors T définit un automorphisme de son feuilletage stable, et par conséquent du facteur correspondant qui est $R_{0,1}$, son automorphisme a pour module λ où les (λ, λ^{-1}) sont les valeurs propres de la matrice ci-dessus. Une motivation cruciale dans la preuve du théorème ci-dessus est que, puisque l'étude des automorphismes des algèbres de von Neumann abéliennes est équivalente à la théorie ergodique d'une transformation unique, on s'attendait à ce que de nombreux résultats de cette théorie aient un analogue dans la situation non abélienne. Cela s'est avéré être le cas en particulier pour le théorème de la tour de Rokhlin.

Il y a cependant une forte différence avec la théorie ergodique classique, qui est l'existence d'un invariant à *valeur complexe* pour les automorphismes périodiques. Si N est un facteur, il peut arriver pour $\theta \in \mathrm{Aut}\, N$ que θ^k soit intérieur pour un certain $k > 0$, mais qu'aucun automorphisme $\theta', \varepsilon(\theta') = \varepsilon(\theta)$ ne satisfasse $\theta'^k = 1$, l'obstruction résultante est le fait qu'une $k^{\text{ième}}$ racine de 1 dans $\mathbf{C}, \gamma(\theta)$ est invariante par multiplication de θ par un automorphisme intérieur. Cela arrive quand

$N = R$, toute paire $(k, z), k > 0, z \in \mathbf{C}, z^k = 1$ apparaît à partir d'un $\theta \in \mathrm{Aut}\, R$ et de plus, la paire (k, z) est le seul invariant de $\varepsilon(\theta) \in \mathrm{Out}\, R$, en d'autres termes, le groupe $\mathrm{Out}\, R = \mathrm{Aut}\, R/\mathrm{Int}\, R$ a seulement un nombre dénombrable de classes de conjugaison paramétrées par (k, z). Comme corollaire, on obtient que $\mathrm{Int}\, R$ est le seul sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}\, R$.

En réfléchissant à l'existence de cet invariant à valeur complexe, on a montré que tous les facteurs (même ceux de type II_1) sont anti isomorphes à eux-mêmes.

En général si N est un facteur de type II_∞, on a un grand nombre d'automorphismes non conjugués avec le même module $\lambda \in]0, 1[$; il était donc très naturel de chercher à savoir quand, étant donné un facteur M de type III_λ, le facteur correspondant de type II_∞ est $R_{0,1}$. Si l'on sait qu'il est $R_{0,1}$ alors, par le théorème ci-dessus, on sait que M est isomorphe au facteur de Powers R_λ.

Comme vu plus haut, R est caractérisé, parmi les facteurs de type II_1, par la propriété d'approximation de Murray et von Neumann. Dans le cas général (non II_1), un facteur M est dit *de dimension approximativement finie* [6] quand :

$\forall\, F$ un sous-ensemble fini de $M, \forall\, V$ un *voisinage fort de 0

$\exists\, K$ une $*$ sous-algèbre finie-dimensionnelle avec $K + V$ [7].

En appliquant le théorème de Glimm caractérisant les C^* algèbres avec seulement des représentations de type I, il découle du travail de O. Marechal [22] et d'Elliott-Woods [13] que pour tout facteur de dimension approximativement finie M (non pas de type I_n, $n < \infty$, ou II_1) et pour toute C^* algèbre A non de type I, il y a une représentation π de A qui engendre M comme algèbre de von Neumann. Ainsi, dès que l'on va au-delà des C^* algèbres de type I, on rencontre cette immense classe de facteurs. De plus, si A est la C^* algèbre correspondant à "l'ensemble de Cantor non commutatif" i.e. $A = \bigotimes_1^\infty M_2(\mathbf{C})$, alors pour toute représentation de A, $\pi(A)$ est de dimension approximativement finie.

Ceci amène de façon évidente deux questions :

(α) Comment classifier les facteurs de dimension approximativement dimensionnelle.

(β) Comment caractériser les C^* algèbres qui engendrent seulement des facteurs de dimension approximativement finie.

En 1968, après avoir essayé de caractériser $R_{0,1}$ (parmi les facteurs de type II_∞) par la propriété d'approximation ci-dessus, V. Ya. Golodets a réussi à montrer que cette classe est stable par produits croisés par des groupes abéliens. Il découle en particulier de ce résultat que si M est de type III_λ, et si M est AFD alors le facteur II_∞ associé est aussi AFD. Cela montre l'intérêt du problème : $R_{0,1}$ est-il unique parmi les AFD de type II_∞ ? La difficulté est qu'alors que tout II_∞ est $\mathrm{II}_1 \otimes \mathrm{I}_\infty$, il est très difficile de voir quelle propriété héritée par un facteur II_1 devrait le forcer à être isomorphe à R.

[6] abrégé en AFD.

[7] *manque F = ?*

En fait, la caractérisation de R, de Murray et von Neumann fait intervenir les * sous-algèbres, et par conséquent elle a encore un certain parfum descriptif. Le second facteur de type II_1 qu'ils ont découvert était distingué par la "propriété Γ" qu'ils considéraient comme une propriété technique ; cette propriété n'a aucune raison de caractériser R puisque pour tout N, $N \otimes R$ la possède, et en fait, en 1962, J. T. Schwartz a fait la distinction entre N, R et $N \otimes R$. Mais en faisant cela, il a trouvé une autre propriété de R qui a été le germe de développements ultérieurs.

Propriété P. M dans H a la propriété P ssi pour tout borné $T \in L(H)$, la fermeture convexe par la norme des uTu^*, u unitaire de M, a une intersection avec M'.

Il a prouvé que parmi N, R et $N \otimes R$, seul R a la propriété P, et de plus, que l'algèbre de groupe $R(\Gamma)$ d'un groupe discret a la propriété P ssi Γ est moyennable. Tout facteur AFD possède la propriété P, mais il n'est pas clair à partir de la définition de savoir si lorsque $M = N \otimes Q$ alors N a la propriété P si M l'a. En fait, la conséquence la plus importante de la propriété P est l'existence d'une projection de E, la norme un de $L(H)$, vers M', avec $E(1) = 1$. Par un résultat de J. Tomiyaman, toute telle projection satisfait $E(aTb) = aE(T)b,\ \ \forall a, b \in M',\ \ \forall T \in L(H)$, et l'existence d'une telle projection de $L(H)$ sur M est indépendante du choix de la représentation. La famille des algèbres de von Neumann satisfaisant cette propriété a les propriétés de stabilité remarquables suivantes :

(1) C'est une classe monotone (selon les intersections décroissantes et la fermeture faible des unions ascendantes).

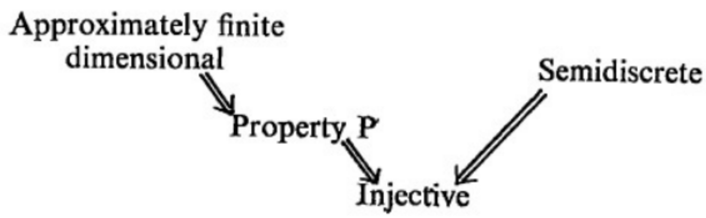
(2) Elle est stable par le commutant.

(3) Elle est stable par les produits croisés par des groupes moyennables.

(4) Elle est stable par le produit tensoriel.
Le nom utilisé pour qualifier cette classe est *injectivité*, puisqu'elle caractérise, grâce à la version non commutative du théorème de Hahn-Banach due à W. Arveson, les algèbres de von Neumann qui sont des objets injectifs dans la catégorie des C^* algèbres, avec des applications complètement positives comme morphismes. Comme cela a été montré par Choi et Effros, ceci est aussi équivalent à l'existence d'une solution dans M de l'équation $y \otimes a \leq b$ (où $a \in M_n(\mathbf{C}), a = a*$ et $b \in M \otimes M_n(\mathbf{C})$ sont donnés) dès qu'une solution existe dans $L(H)$. C'est très utile parce que cela permet de traiter les intégrales directes :

(5) $M = \{(x(s))_{s \in A}, x(s) \in M(S)\ \forall S \in A$ est injective si presque tous les $M(s)$ sont injectives.

Donc soit M une algèbre de von Neumann injective, (5) et la théorie de la réduction de von Neumann nous permettent de supposer que M est un facteur, alors l'algèbre correspondante de von Neumann de type II_∞ est injective par (3) et à nouveau par (5), on peut se contenter d'analyser les facteurs injectifs de type II_∞ et finalement de type II_1, en écrivant $M = N \otimes\ \mathrm{I}_\infty$. Alors N est injectif de type II_1 et par le théorème de Tomiyama, toute projection E de norme un, $E : L(H) \to N$, avec $E(1) = 1$, satisfait $E(aTb) = aE(T)b$, $\forall a, b \in N$, $\forall T \in L(H)$. Il découle de cela que $\varphi = \mathrm{Trace} \circ E$ est un état sur $L(H)$ *invariant par tous les unitaires de* N. On appelle un tel état une *hypertrace*. En 1960, M. Takesaki a montré que si A_1, A_2 sont des C^* algèbres simples alors $A_1 \otimes A_2$ est aussi simple (ici $A_1 \otimes A_2$ agit dans $H_1 \otimes H_2$ si A_1 et A_2 agissent dans H_1, H_2), sa preuve fait intervenir une caractérisation de la norme, sur le produit tensoriel algébrique $A_1 \odot A_2$, venant de la représentation dans $H_1 \otimes H_2$, comme la plus petite norme de toutes les C^* normes possibles sur $A_1 \odot A_2$. La complétion correspondante $A_1 \otimes_{\min} A_2$ est appelée produit tensoriel minimal de A_1 et A_2. M. Takesaki a de plus montré que (comme la théorie de Grothendieck pour les espaces localement convexes) pour certaines C^* algèbres (celles qui sont *nucléaires* par définition), seulement une C^* norme existe sur $A \odot B$ pour les C^* algèbres B arbitraires ([34], [31]). En 1972, Effros et Lance ont découvert que certains facteurs (tous les facteurs de Araki-Woods en fait) donnent de très bonnes factorisations de $L(H)$ dans la mesure où l'application naturelle η de $M \odot M'$ dans $L(H)$ donnée par $\eta(\Sigma a_i \otimes b_i) = \Sigma a_i b_i$ est non seulement un homomorphisme injectif mais est également une *isométrie* de $M \otimes_{\min} M'$ vers la C^* algèbre $C^*(M, M')$ engendrée par M et M' dans $L(H)$. Ils ont appelé cette remarquable propriété la *semi-discrétion* et ils ont démontré que la semi-discrétion $\Longrightarrow$ l'injectivité. Donc on obtient



En fait, toutes ces propriétés sont toutes équivalentes.

Supposons d'abord que N est un facteur de type II_1 et qu'il est injectif, l'existence d'une hypertrace sur N implique que N est semi-discrète ; alors le théorème de Takesaki montre que $C^*(N, N')$ est *simple* et par conséquent, qu'elle ne peut contenir d'opérateur compact non nul dans H. La dichotomie suivante montre alors que N a la propriété Γ. Soit N un facteur de type II_1 dans H ; alors N a la propriété Γ ou $C^*(N, N')$ contient tous les opérateurs compacts. (Cela a été suggéré par des calculs précis de C. Akemann et P. Ostrand montrant que pour l'algèbre de groupes des groupes libres, $C^*(N, N')$ contient tous les opérateurs compacts.)

Maintenant, N a la propriété Γ ssi le groupe $\mathrm{Int}\, N$ n'est pas fermé dans $\mathrm{Aut}\, N$ (où $\mathrm{Aut}\, N$ est offert avec sa topologie naturelle : $\theta_\alpha \to \theta$ ssi $\theta_\alpha(x) \to \theta(x)$ fortement pour tout $x \in N$). De plus, en général, la fermeture de $\mathrm{Int}\, N$ est caractérisée en fonction de $C^*(N, N')$ par l'existence d'une extension $\widehat{\theta}$ de θ sur N qui est l'identité sur N'. Comme dans notre cas, $C^*(N, N')$ est $N \otimes_{\min} N'$, on voit que $\mathrm{Aut}\, N = \overline{\mathrm{Int}}\, N \not\subset \mathrm{Int}\, N$.

La prochaine étape consiste à montrer que $N \otimes R$ est isomorphe à N. Un résultat remarquable de D. MacDuff affirme que cela est vrai dès que N a une suite centrale qui n'est pas hypercentrale, ce qui une fois traduit en termes d'automorphismes implique que

$$\overline{\mathrm{Int}}\, N \not\subset \mathrm{ct} N \implies N \sim N \otimes R$$

où $\mathrm{ct}N$ est le sous-groupe normal de tous les automorphismes θ de N qui sont triviaux sur les séquences centrales. Ici, on a $\mathrm{ct}N = \mathrm{Int}\, N$ parce que si $\theta \in \mathrm{ct}N$ alors $\theta \otimes 1 \in \mathrm{ct}(N \otimes N)$ (cela est dû à une caractérisation de ct utilisant $C^*(N, N')$) et comme la symétrie $\sigma_N(x \otimes y) = y \otimes x$ dans $N \otimes N$ est dans $\overline{\mathrm{Int}}\, N \otimes N$, on a $\theta \otimes \theta^{-1}$ intérieur (et par conséquent θ intérieur), parce que $\varepsilon(ct)$ et $\varepsilon(\overline{\mathrm{Int}})$ commutent toujours et $\varepsilon(\theta \otimes \theta^{-1}) = [\varepsilon(\theta \otimes 1), \varepsilon(\sigma_N)]$. Des propriétés $N \sim N \otimes R$

et $\sigma_N \in \overline{\mathrm{Int}}$, on déduit finalement la propriété d'approximation de Murray et von Neumann. Ceci peut être très simplement vu si l'on suppose que N est un sous-facteur de R mais pour le cas général, on utilise l'existence d'un isomorphisme entre N et un sous-facteur de l'ultra-produit R^ω où ω est un ultrafiltre libre, qui en retour découle de l'analogue de la preuve de Day-Namioka de la caractérisation de Følner des groupes moyennables. Le rôle de la moyenne invariante est joué par l'hypertrace et $L(H)$ remplace $l^\infty(\Gamma)$ où Γ est le groupe discret. Parmi ces démonstrations, celles qui sont les plus techniques sont celles reliant les propriétés des automorphismes (comme $\theta \in \overline{\mathrm{Int}}\, N$) avec les propriétés de $C^*(N, N')$ (comme l'existence de $\widehat{\theta}$). Elles utilisent la méthode d'exhaustion, permettant de passer d'une information infinitésimale à une information globale, et une manière probabiliste de prendre la décomposition polaire d'un opérateur (la façon habituelle $x \to u(x)|x|$ étant trop discontinue), basée sur l'inégalité $\int \|E^a(h^2) - E^a(k^2)\|_2^2 \, da \leq \|h-k\|_2 \|h+k\|_2$ où E^a est la projection spectrale $1_{[a,+\infty[}$. Ainsi on a maintenant que tous les facteurs injectifs de type II_1 sont isomorphes à R. Comme corollaire immédiat, puisque toutes les sous-algèbres de von Neumann de R sont aussi injectives, on obtient leur classification complète à isomorphisme près. Il en découle que *R est le seul facteur contenu dans tous les autres*, ce qui justifie pleinement la conviction initiale de Murray et von Neumann que R est le plus simple des facteurs. Également, si Γ est un *groupe discret moyennable* alors son algèbre de groupe est isomorphe à R dès que $\{g \in \Gamma, \text{ tel que la classe de } g \text{ est finie}\} = \{e\}$. Si M est injectif de type II_∞ alors il est isomorphe à $R_{0,1}$. Il en découle que si G est un groupe compact localement *connexe* arbitraire, alors la partie non de type I de son algèbre de groupe $R(G)$ est de la forme $A \otimes R_{0,1}$ où A est une algèbre de von Neumann *abélienne*. De plus, la théorie du type III permet de déduire de cela que les 4 propriétés ci-dessus sont en général équivalentes. On a maintenant seulement une classe qui a, d'un côté la jolie caractérisation vue après le théorème de Glimm et d'un autre côté, toutes les propriétés de stabilité de l'injectivité.

De plus dans leur travail sur les C^* produits tensoriels, Effros et Lance ont montré que (1) toutes les représentations des C^* algèbres nucléaires engendrent des algèbres de von Neumann injectives et (2) que si toutes les représentations d'une C^* algèbre sont semi-discrètes, alors la C^* algèbre est nucléaire. Par conséquent, les C^* algèbres satisfaisant la condition (3) sont exactement celles qui sont nucléaires (comme corollaire, $C^*(G)$ est nucléaire pour G connexe localement compact). Mentionnons également que pour les feuilletages, l'injectivité de l'algèbre de von Neumann associée est équivalente à la *moyennabilité* du feuilletage, une propriété remarquable et très utile développée par Zimmer pour les actions de groupes ergodiques. (Par exemple, l'action du groupe fondamental Γ d'une surface de Riemann compacte V sur la frontière naturelle de Poisson $\partial\widetilde{V}$ de son espace couvrant $\widetilde{V}$ est toujours ergodique moyennable et est souvent de type III_1). Venons-en maintenant aux facteurs injectifs de type III. Si M est de type III_λ, $\lambda \in]0,1[$ alors M est isomorphe au facteurs de Powers R_λ. Wolfgang Krieger a montré en 1973 que pour les facteurs associés à une transformation ergodique unique d'un espace de mesure, le flot des poids est un invariant complet et peut être n'importe quel flot ergodique. Il découle d'un lemme cohomologique très puissant dans sa preuve, et de la décomposition discrète des facteurs de type III_0, que tout facteur injectif de type III_0 provient d'une unique transformation ergodique d'un espace de mesure et est donc l'un des facteurs de Krieger. Par conséquent, dans le cas III_0, le problème de la classification est transféré à la théorie ergodique : il y a de nombreux facteurs injectifs de type III_0 tels que les flots ergodiques (non transitifs). Il n'y a qu'un seul facteur injectif M avec $r_\infty(M) = [0, +\infty]$, c'est le facteur de Araki-Woods R_1, naissant comme algèbre des observables locales dans le corps libre, mais on ne sait toujours pas si c'est le seul facteur de type III_1 injectif, (i.e. si $r_\infty(M) = S(M)$ pour tout facteur injectif). Ce facteur R_1 est associé au feuilletage de Anosov du flot géodésique d'une surface de Riemann de genre > 1. On a utilisé les feuilletages ci-dessus pour illustrer la théorie générale par des exemples mais les algèbres de von Neumann peuvent être très utiles pour l'étude des feuilletages per se. Ruelle et Sullivan ont montré comment, pour un feuilletage orienté † de la variété compacte V (i.e. le sous-fibré F de TV, tangent à † est orienté), l'invariant d'holonomie des mesures transverses Λ correspond exactement aux *courants fermés* C, "positifs dans le sens de la feuille". Pour un feuilletage ainsi mesuré, il est naturel de définir la caractéristique d'Euler comme $\langle e(F), [C]\rangle$, la classe d'Euler du fibré F évalué sur le cycle $[C]$ créé par le courant C. Maintenant, les algèbres de von Neumann permettent de définir les nombres de Betti

$$\beta_l = \int \dim H^l(f)\, d\Lambda(f) < \infty, \quad [8]$$

où $H^l(f)$ est l'espace des formes harmoniques de carré intégrable sur f (par rapport à la structure euclidienne sur F, dont β_l s'avère être indépendant). On a alors $(-1)^l \beta_l - (F), [C]\rangle$. Comme β_0 est la mesure de l'ensemble des feuilles compactes d'holonomie finie, on obtient que pour les feuilletages 2-dimensionnels, la courbure moyenne des feuilles est négative. La formule ci-dessus est un cas particulier du théorème de l'indice qui calcule pour les opérateurs différentiels elliptiques sur † le scalaire

$$\int \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Ker}\, D_f)\, d\Lambda(f) - \int \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Ker}\, D_f^*)\, d\Lambda(f)$$

comme $\mathrm{Ch}\, D \,.\, \tau(F \otimes \mathbf{C})[C]$, où $\mathrm{Ch}\, D \in H^*(V, \mathbf{Q})$ est le caractère de Chern du symbole de D, $\tau(F \otimes \mathbf{C})(H^*(V, \mathbf{Q})$ la classe de Todd de $F \otimes \mathbf{C}$ et $[C]_p(V, \mathbf{R})$ la classe d'homologie du flot de Ruelle Sullivan.

Bibliographie

1. H. Araki, G. Elliott, *On the definition of C^* algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 9 (1973), 93-112.
2. M. Choi, E. Effros, *Injectivity and operator algebras* (preprint).
3. F. Combes *Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche*, Compositio Math. 23 (1971), 49-77.
4. A. Connes, *Une classification des facteurs de type* III. Ann. Sci. École Norm. Sup. 6 (1973), 133-252.
5. ————, *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 8 (1975), 383-420.
6. A Connes, M. Takesaki, *The flow of weights on factors of type* III, Tôhoku Math. J. 29 (1977), 473-575.
7. A. Connes, *Classification of injective factors*, Ann. of Math. 104 (1976), 73-115.

————, *Sur la théorie de l'intégration non commutative* (preprint). 8.

9. J. Dixmier, *Algèbres quasi unitaires*, Comment. Math. Helv. 26 (1952), 275-322.
10. ————, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris.
11. ————, *Les C^* algèbres et leurs représentations*, 2nd éd., Gauthier-Villars, Paris.
12. E. Effros, C. Lance, *Tensor product of operator algebras* Advances in Math. 25 (1977), 1-39.
13. G. Elliott, E. J. Woods, *The equivalence of various definitions of hyperfiniteness of a properly infinite von Neumann algebra* (preprint).
14. I. M. Gelfand, M. Naimark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, Mat. Sb. 12 (1943), 197-213.

[8] Même s'il peut arriver que $\dim H^l(f) = +\infty$, $\forall f \in \Omega$.

15. J. Glimm, *Type* IC^* *algebras*, Ann. of Math. 73 (1961), 572-612.
16. V. Ya. Golodets, *Crossed products of von Neumann algebras*, (Uspehi Math. Nauk. 26 (1971), 3-50.
17. U. Haagerup, *Normal weights on* W^* *algebras*, J. Functional Anal. 19 (1975), 302-317.
18. W. Krieger, *Ergodic flows and the isomorphism of factors*, Math. Ann. 223 (1976), 19-70.
19. D. Mc. Duff, *Uncountably many* II_1 *factors*, Ann. of Math. 90 (1969), 372-377.
20. ______, *Central sequences and the hyperfinite factor*, Proc. London Math. Soc. 21 (1970), 443-461.
21. G. Mackey, *Ergodic theory, group theory and differential geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963), 1184-1191.
22. O. Marechal, *Une remarque sur un théorème de Glimm*, Bull. Sci. Math. 99 (1975), 41-44.
23. F. J. Murray, J. von Neumann, *On rings of operators*, Ann. of Math. 37 (1936), 116-229.
24. ______, *On rings of operators* II, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 208-248.
25. ______, *On rings of operators* IV, Ann. of Math. 44, (1943), 716-808.
26. J. von Neumann, *On a certain topology for rings of operators*, Ann. of Math. 37 (1936), 111-115.
27. ______, *On rings of operators* III, Ann, of Math. 41 (1940), 94-161.
28. G. Pedersen, C^* *integrals*, Thesis, Copenhague University, 1971.
29. R. T. Powers, *Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings*, Ann. of Math 86 (1967), 138-171.
30. D. Ruelle, D. Sullivan, *Currents, flows and diffeomorphisms*, Topology 14 319-327.
31. S. Sakai C^* *and* W^* *algebras*, Ergebnisse der Mathematik Und ihrer Grenzgebite, vol. 60 Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.
32. J. T. Schwartz, *Two finite, non hyperfinite, non isomorphic factors*, Comm. Pure. Appl. Math. 16 (1963), 111-120.
33. I. Segal, *A non commutative extension of abstract integration*, Ann, of Math, 57 (1953), 401-457, correction 595-596.
34. M. Takesaki, *On the cross norm of the direct product of* C^* *algebras*, Tôhoku Math. J. 16 (1964), 111-122.
35. ______, *Tomita's theory and its applications*, Lecture Notes in Math., vol. 128, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.
36. ______, *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III*, Acta. Math, 131 (1973), 249-310.

Université de Paris VI
Paris, France

Proceedings du Congrès international des mathématiciens
Vancouver, 1974

Théorie de la structure pour les facteurs de type III

A. Connes

Motivé par l'étude de la représentation régulière des groupes localement compacts non unimodulaires, J. Dixmier, en 1952, a introduit les algèbres quasi-hilbertiennes. M. Tomita a prouvé en 1967 que toute algèbre de von Neumann M provient d'une algèbre de Hilbert modulaire [9]. Comme cela a été montré par F. Combes et M. Takesaki, tout poids [10] φ sur M donne naissance à une algèbre modulaire de Hilbert permettant de réobtenir en retour M, et en particulier donne naissance à un opérateur positif Δ_φ, (l'opérateur modulaire) et à un groupe à un paramètre d'automorphismes sur $M : \sigma^\varphi$ (le groupe modulaire d'automorphismes). Voir [7].

Les formules

(A) $$r_\infty(M) = \bigcup \text{ Sp } \Delta_\varphi, \text{ [11]}$$

(B) $$\rho(M) = \{e^{-2\pi/T}, \ \exists\varphi \text{ avec } \sigma_T^\varphi = 1\}.$$

en reliant les objets ci-dessus à ceux de la classification de Powers, Araki, Woods, Krieger [1] si M est un produit tensoriel infini de facteurs de type I nous a amené à étudier les deux invariants :

$$S(M) = \bigcup \text{ Sp } \Delta_\varphi, \qquad T(M) = \{T \in \mathbf{R}, \exists\varphi, \sigma_T^\varphi = 1\}$$

pour les facteurs arbitraires de type III.

Il était essentiel, pour cela, de déterminer comment le groupe d'automorphismes σ^φ dépend du choix de φ. La réponse [2] se résume ainsi :

(1°) Pour tout poids φ sur une algèbre de von Neumann M, il existe un unique cocycle unitaire [12] $t \to \mu_t$ (μ dénote $(D\psi : D\varphi)$ parce que c'est une dérivée de "Radon-Nikodym") tel que :

$$\sigma_t^\psi(x) = \mu_t \sigma_t^\varphi(x) \mu_t^* \quad \forall x \in M, \forall t \in \mathbf{R}$$

et

$$\psi(x) = \varphi(x\mu_{-i}) \qquad \forall x \in M_+. \text{ [13]}$$

[9] Et par conséquent, d'une algèbre quasi-hilbertienne.

[10] On parle ici d'un poids normal semi-défini fidèle.

[11] Ya. Golodets a obtenu une formule très proche de (A); voir [2] pour la bibliographie.

[12] Pour tout $t \in \mathbf{R}, \mu_t$ est un unitaire dans M, l'application $t \to \mu_t$ est continue et satisfait $\mu_{t_1+t_2} = \mu_{t_1}\sigma_{t_1}^\varphi(\mu_{t_2}) \ \forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}$.

[13] Pour un énoncé précis, voir [2].

(2°) Pour tout cocycle unitaire $t \to \mu_t$, il existe un unique poids ψ sur M tel que

$$(D\psi : D\varphi)_t = \mu_t \ \forall t \in \mathbf{R}.$$

Par conséquent, il existe un noyau abstrait δ, homomorphisme de R vers le centre de $\mathrm{Out}\, M = \mathrm{Aut}\, M/\mathrm{Int}\, M$ qui caractérise les groupes d'automorphismes σ^φ par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Aut}\, M \arrow[d] \\
\boldsymbol{R} \arrow[ur, "\sigma^\varphi"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\
 & \mathrm{Out}\, M
\end{tikzcd}$$

De plus, $T(M) = \mathrm{Ker}\, \delta$ et $S(M) \cap \mathbf{R}_+^*$ est le spectre (au sens de [2]) de δ à la condition que M soit un facteur. Il découle de cela que $T(M)$ et $S(M)$ sont tous les deux des groupes [14], que quand $S(M) \neq \{0, 1\}, T(M)$ est l'orthogonal de $S(M) \cap \mathbf{R}_+^*$, alors que quand $S(M) = \{0, 1\}$, $T(M)$ peut être n'importe quel sous-groupe dénombrable de $\mathbf{R}$.

De plus, T et S deviennent faciles à calculer ; par exemple, quand M est le facteur provenant d'une action ergodique d'un groupe, ils sont reliés par les formules (A), (B) aux invariants r et ρ introduits en théorie ergodique par W. Krieger.

En particulier, cela a montré que la propriété L_λ de Powers n'est pas équivalente à la propriété L'_λ de Araki [1], de telle façon qu'en général S et r_∞ sont des invariants différents. Mais entrons dans les détails de la classification : tout facteur de type III appartient à l'une des 3 classes suivantes :

III_λ, $\lambda \in]0, 1[$ signifiant que $S(M) = \{\lambda^n, n \in \mathbf{Z}^-\}$,

III_0 i.e., $S(M) = \{0, 1\}$, et

III_1 i.e., $S(M) = [0, +\infty[$.

Pour les facteurs M de type III_λ, $\lambda \in]0, 1[$,

il existe des sous-algèbres maximales [15] de type II_∞ de M. Soit N une sous-algèbre maximale II_∞ de M ; alors N est un facteur et M est engendrée par N et par un unitaire U dans le normalisateur de N tel que $\tau(UxU^*) = \lambda\tau(x)$, $\forall x \in N_+$, $\forall \tau$ la trace normale sur N. Soit $M = N_1(U_1) = N_2(U_2)$ deux décompositions de M comme ci-dessus ; alors, il existe un automorphisme intérieur ϕ de M tel que $\phi(N_1) = N_2$, $\phi(U_1) = U_2$. Cette décomposition nous permet de traduire la plupart des problèmes sur M en fonction de N qui est un objet plus simple. Par exemple, tout état normal φ sur M est unitairement équivalent à un état $\psi \circ E$ où ψ est un état normal sur N et E est l'espérance unique de M sur N.

[14] Pour S, cette propriété a été démontrée en collaboration avec van Daele.

[15] Ici par "sous-algèbre", on veut dire domaine d'une sous-algèbre de von Neumann d'une espérance normale conditionnelle de M.

Le produit croisé $N(\theta)$ d'un facteur N de type II_∞ par un automorphisme θ multipliant les traces par λ est un facteur de type III_λ, et tout facteur de type III_λ s'obtient de cette manière, avec $N_1(\theta_1)$ isomorphe à $N_2(\theta_2)$, si et seulement s'il existe [16] un isomorphisme π de N_1 sur N_2 tel que $\pi\theta_1\pi^{-1} = \theta_2$. Il y a des facteurs N de type II_∞ et des automorphismes θ_1, θ_2 de N qui multiplient les traces par le même nombre $\lambda \in]0,1[$ alors qu'elles n'appartiennent pas à la même classe de conjugaison dans $\mathrm{Aut}\, N$.

Les facteurs de type III_0 apparaissent comme cas limite du type II_∞. Soit M de type III_0 ; alors c'est le produit croisé d'une algèbre de von Neumann de type II_∞ par le coproduit infini des groupes de deux éléments. De plus, toute sous-algèbre [17] de type II_∞ de M est le premier élément d'une suite croissante N_j de sous-algèbres de von Neumann de type II_∞ avec $\overline{UN_j} = M$. Soit N une algèbre de von Neumann de type II_∞, et $\theta \in \mathrm{Aut}\, N$ une contraction stricte par rapport à une certaine trace (voir [2]) et strictement ergodique sur le centre C de N. Alors le produit croisé $N(\theta)$ est un facteur de type III_0. Tout facteur de type III_0 s'obtient de cette manière et$N_1(\theta_1)$ est isomorphe à $N_2(\theta_2)$ si et seulement s'il existe des projections non nulles $e_j \in C_j$ telles que les automorphismes θ_j, e_j induits par θ_j sur e_j au sens de Kakutani sont les mêmes.

En utilisant cela et le travail précédent de W. Krieger sur les automorphismes qui ne sont pas de type produit infini, on obtient un facteur hyperfini qui n'est pas un produit tensoriel infini de facteurs de type I [2]. En commençant maintenant à partir d'une décomposition discrète $M = N(\theta)$ comme ci-dessus d'un facteur de type III_0 et en construisant le flot sur θ selon la fonction $d\tau/d\tau \circ \theta$ [18] on obtient un groupe à un paramètre $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in R_+^*}$ d'automorphismes d'une algèbre de von Neumann p de type II_∞ amenant la décomposition de M comme produit croisé continu donnée par M. Takesaki [8], qui cette fois-ci est unique.

Cette technique de dualité a permis à M. Takesaki de démontrer les résultats terminaux suivants [8]:

Facteurs de type III_1. Soit N un facteur de type II_∞, $(\theta_t)_{t\in\mathbf{R}}$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de N, avec $\tau \circ \theta_t = e^{-t}\tau$ pour toute trace normale τ ; alors le produit croisé continu de N par $(\theta_t)_{t\in\mathbf{R}}$ est un facteur de type III_1. Tout facteur de type III_1 s'obtient de cette manière et la décomposition est unique (comme pour les facteurs de type III_λ).

Pourtant l'apparition de produits croisés continus complique l'étude de M. Par exemple, bien que sur les facteurs de type III_λ, $\lambda \neq 1$, tout état normal ait un centralisateur contenant une sous-algèbre abélienne maximale de M, cela n'est pas le cas pour les facteurs de type III_1. Aussi, en utilisant la fermeture du domaine de l'homomorphisme modulaire δ dans $\mathrm{Aut}\, M/\overline{\mathrm{Int}\, M}$ comme un groupe de Galois de M, on peut exhiber des facteurs de type III_1 qui n'admettent aucune décomposition comme produits croisés d'algèbres de von Neumann semi-finies par des groupes abéliens discrets [4].

Dans la mesure où les facteurs de type III_λ, $\lambda \in]0,1[$, sont très simples à analyser (par exemple, ils montrent fortement leur non normalité : le commutant relatif d'une sous-algèbre maximale de

[16] La théorie des facteurs de type III_λ comme elle est présentée dans [2] était complète au printemps 1972 ; les améliorations de [2] sur l'unicité ont été obtenus en collaboration avec M. Takesaki [5].

[17] Ici par "sous-algèbre", on veut dire domaine d'une sous-algèbre de von Neumann d'une espérance normale conditionnelle de M.

[18] τ est une trace contractée par θ ; pour des détails, voir [2].

type II_∞ s'est réduite aux scalaires), cela aide souvent, lorsqu'on essaie de prouver une propriété générale des facteurs de type III de commencer par le cas III_λ, $\lambda \in]0,1[$, et ensuite de considérer le cas III_1 comme une limite lorsque $\lambda \to 1$. Le produit final est indépendant de la classification (cf. [2] pour la non normalité des algèbres de type III).

L'un des effets importants de la théorie de Tomita est de permettre de généraliser correctement au type III des notions qui existent seulement pour les algèbres semi-finies. Par exemple, le seul opérateur de Hilbert-Schmidt sur un facteur de type III étant 0, il semble difficile d'avoir une généralisation intéressante du cône des opérateurs positifs de Hilbert-Schmidt. En utilisant l'opérateur modulaire, on peut construire des structures d'espace pré-hilbertien s sur M pour lesquelles la complétion de M_+ est un cône auto-dual ; le cône obtenu est alors indépendant de s [19], et se réduit au cône de Hilbert-Schmidt lorsque M est semi-fini [20].

De plus, la classe des cônes ainsi obtenus est exactement la classe des cônes convexes auto-duaux V dans l'espace de Hilbert H satisfaisant les deux conditions suivantes : V est *complexe*, i.e., le quotient de l'algèbre de Lie $D(V) = \{\delta, \delta \in \mathscr{L}(H), e^{t\delta}V = V,\ \forall t\}$ par son centre est une algèbre de Lie *complexe* pour une certaine structure complexe I. V est *homogène par face*, i.e., pour chaque face F de V, l'opérateur $P_F - P_{F^\perp}$ appartient à $D(V)$ où P_F signifie la projection orthogonale du sous-espace vectoriel engendré par F et $F^\perp$ la face orthogonale à F.

Il y a une analogie surprenante entre les relations de type II et de type III et les relations entre les groupes localement compacts unimodulaires et non unimodulaires. Comparons par exemple ce qui a été dit ci-dessus pour le cas III_λ, $\lambda \in]0,1[$, avec la description élémentaire d'un groupe localement compact G dont le module Δ_G a comme domaine $\{\lambda^n, n \in Z\}$, comme produit croisé d'un groupe unimodulaire (le noyau de Δ_G) par un automorphisme unique.

Si on élargit la notion de groupe localement compact pour qu'elle inclue les groupes virtuels de Mackey, on a encore une notion de module Δ de G et de représentation régulière à gauche de G ; cela engendre une algèbre de von Neumann $U(G)$. Alors la fermeture du domaine du module est un sous-groupe virtuel de $\mathbf{R}_+^*$ et on a la chose suivante quand G est un groupe virtuel *principal* [21] :

si $\overline{\Delta(G)}$ est un sous-groupe habituel de $\mathbf{R}_+^*$, il coïncide avec $S(U(G))$ (et en particulier avec $r(G)$, l'ensemble ratio de Krieger) ; sinon $U(G)$ est de type III_0, et l'action strictement ergodique de $\mathbf{R}_+^*$ correspondant à $\overline{\Delta(G)}$ n'est rien d'autre que le flot décrit ci-dessus pour les facteurs de type III_0.

Dans [5], on étudie le spectre modulaire virtuel $S_V(M)$ pour les facteurs arbitraires et on montre, par exemple, par la formule $S_V(M_1 \otimes M_2) = \overline{S_V(M_1) \cdot S_V(M_2)}$ la manière dont il se comporte comme fermeture du domaine d'un "module" de M.

On ne peut pas terminer sans mentionner le beau résultat de W. Krieger sur l'équivalence faible

[19] Pour un énoncé précis, voir [3].

[20] Cette généralisation a été obtenue indépendamment par S. L. Woronowicz, H. Araki et moi-même. Voir [3] pour la bibliographie.

[21] $U(G)$ est alors un facteur.

[6]. Avec la terminologie ci-dessus, ce résultat montre que le spectre modulaire virtuel S_V est un invariant complet pour la classe des facteurs qui provient des transformations ergodiques [22], et l'on peut lui faire prendre comme valeur n'importe quel sous-groupe virtuel de $\mathbf{R}_+^*$.

Cela montre combien il est important de décider si n'importe quel facteur hyperfini provient d'une transformation ergodique et en particulier de savoir si le facteur hyperfini de type II_∞ est unique.

Références

1. H. Araki, *Some topics in the theory of operator algebras*, Proc. Internat. Congress Math. (Nice, 1970), vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 379-382.
2. A. Connes, *Une classification des facteurs de type* III, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 6 (1973), 133.
3. ————, *Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés sous jacents aux algèbres de von Neumann*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 24 (1974), fasc. 4.
4. ———— *Almost periodic states and factors of type* III_1, J. Functional Analysis June 1974.
5. A. Connes, M. Takesaki, *The flow of weights of type* III *factors* (to appear).
6. W. Krieger, *On the weak equivalence problem of ergodic groups* (to appear).
7. M. Takesaki, *One parameter automorphism groups and states of operator algebras*, Proc. Internat. Congress Math. (Nice, 1970), vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 427-432.
8. ————, *Duality in cross products and the structure of von Neumann algebras of type* III, Acta Math. 131 (1973), 249-310.

CNRS
Val d'Oise, France

[22] par la construction du groupe de l'espace de mesure.